Revista de Filosofia do IFCH da Universidade Estadual de Campinas, v. 3, n. 7., jul./dez., 2019.

A Geometria: Uma apresentação

The Geometry: A presentation

César Augusto Battisti[1]
cesar.battisti@hotmail.com

Resumo: O presente texto tem por objetivo fazer uma apresentação de *A Geometria* – e, com isso, servir de suporte à sua leitura e compreensão –, obra cuja tradução para o português publicamos recentemente juntamente com a tradução (feita por colegas) dos demais textos publicados por Descartes em 1637, o *Discurso do Método* e os outros dois ensaios metodológicos, *A Dióptrica* e *Os Meteoros*. Com esse intuito, o artigo traz elementos e discussões relativos à sua história e composição, à sua divisão e estrutura, a seus problemas constituintes e suas articulações, bem como a questões de história da matemática e a repercussões metodológicas e conceptuais dentro do pensamento cartesiano em seu todo.

Palavras-chave: Matemática cartesiana; método; análise; equação; curva; Pappus.

Abstract: The present text aims to make a presentation of *The Geometry* - and thus to support its reading and comprehension - work whose translation to Portuguese we have recently published together with the translation (done by colleagues) of the other texts published by Descartes in 1637, the *Discourse on the Method* and the other two methodological essays, *The Optics* and *The Meteorology*. To this end, the article brings elements and discussions concerning its history and composition, its division and structure, its constituent problems and its articulations, as well as questions of mathematical history and methodological and conceptual repercussions within Cartesian thought in its whole.

Key-words: Cartesian Mathematics; method; analysis; equation; curve; Pappus.

1 Docente do Curso de Filosofia e do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNIOESTE.

Origem do texto

A Geometria é o último dos três tratados que, somados ao *Discurso do Método,* deram origem, em 1637, à primeira publicação de Descartes. Caracterizada como "ensaio do método" ao lado de *A Dióptrica* e de *Os Meteoros,* ela é a principal obra matemática do autor e a única publicada em vida, ao mesmo tempo em que se constitui em texto capital para a compreensão do pensamento cartesiano em seus aspectos mais fundamentais. Ponto de inflexão entre a matemática grega e a matemática moderna, *A Geometria* é também, em seu pleno sentido, um clássico da História da Matemática.

Ainda que vários de seus temas correspondam a pesquisas anteriores, ela não consta explicitamente nos planos de publicação do autor até o ano de 1636, tendo sido incluída no projeto da edição apenas um ano e meio antes dos textos virem a público. Numa carta a Huygens de 1º. de novembro de 1635, Descartes ainda se referia à impressão de *A Dióptrica*, acrescida apenas de *Os Meteoros*; e, embora fizesse uma vaga menção a um prefácio (ao futuro *Discurso do Método*), não havia nela nenhuma alusão a *A Geometria* (AT I, p. 329-30).[2] É apenas na carta a Mersenne de março de 1636 que aparece pela primeira vez, como parte do projeto, o nome do terceiro ensaio metodológico, e já imbuído de uma missão nada modesta: "E, a fim de que saibais o que desejo fazer imprimir, haverá quatro tratados, todos em francês. (...) Enfim, em *A Geometria,* eu me esforço para fornecer uma maneira geral para resolver todos os problemas que ainda não o foram" (AT I, p. 339-40).

É plenamente plausível, portanto, considerarmos que a redação definitiva de *A Geometria* tenha ocorrido, em boa medida, durante o ano de 1636, talvez mesmo em seus meses finais, tendo sido consolidada no início do ano seguinte. Com efeito, diz Descartes em outubro de 1637: *A Geometria* é "um tratado que eu praticamente compus enquanto eram impressos meus *Meteoros*, e mesmo eu inventei uma parte dela durante esse período" (AT I, p. 458). Ora, tendo em conta que a impressão de *A Dióptrica* deva ter iniciado apenas em agosto de 1636 (AT I, p. 611) e que, em razão de atrasos, ela ainda não estava pronta em final de outubro, essa tarefa deve ter se estendido até os últimos meses do ano. A impressão de *Os Meteoros*, por sua vez, começa apenas em dezembro, ou mesmo em janeiro do ano seguinte. É nesse período que Descartes finaliza a redação de *A Geometria*, tendo ela sido impressa nos meses subsequente; e é em 27 de fevereiro de 1637 (AT I, p. 620-1) que é anunciado o título definitivo do volume, estando nas mãos do livreiro, no início de março (AT I,

2 As citações dos textos de Descartes serão feitas a partir da edição *standard* das obras completas do filósofo, editadas por Charles Adam e Paul Tannery (AT); quando viável, são indicadas também, junto com a paginação, as linhas onde se localiza a citação. No caso de *A Geometria*, as citações são extraídas de nossa tradução, publicada pela Editora Unesp (Descartes, 2018, p. 349-474; AT VI, p. 367-485), mas são fornecidas apenas as referências de AT, constantes também na tradução. A tradução dos textos cartesianos e também de textos de outros autores é sempre nossa, a menos que haja indicação de alguma edição em português.

p. 623-4), as primeiras páginas do *Discurso do Método*, enquanto as restantes estavam sendo terminadas. Nos últimos dias de março, finalmente, a impressão dos quatro textos está toda ela completa, tendo Descartes enviado a Huygens, no dia 29 (AT I, p. 627), um exemplar pessoal do *Discurso* e de *A Geometria*, já estando ele de posse dos outros dois ensaios. Tendo sido concedido anteriormente o privilégio holandês (na data de 20 de dezembro de 1636), a aprovação real francesa dos textos, dada em maio de 1637, é recebida no início do mês seguinte e a impressão finalizada no dia 8 de junho, data oficial da publicação (AT VI, p. 515; p. 518).

Finalizada em um curto período do tempo, certas decisões relativas à redação e à estrutura da obra devem ter sido tomadas nessa época. Tais circunstâncias, em parte, poderiam explicar obscuridades, lacunas e omissões que ocorrem no seu interior. Por outro lado, visto que ela recupera pesquisas, intermitentes, feitas em um período de quase duas décadas, determinadas dificuldades e particularidades do texto e, mesmo, passagens intrincadas poderiam ser o reflexo das modificações ocorridas ao longo desse percurso.

Essas são razões que explicam a presença de certos elementos determinantes do estilo, da redação e da compreensão do texto. Há, contudo, outras razões que fazem dele ser de difícil leitura, tanto para o leitor atual quanto para o leitor da época. O próprio Descartes nos adverte a respeito da sua "inteligibilidade restrita" e admite explicitamente que muitas das omissões e lacunas foram propositais. Na advertência de abertura da obra (AT VI, p. 368), o autor justifica dificuldades de compreensão em razão do uso que faz dos conhecimentos matemáticos existentes (registrados nos livros) sem se referir explicitamente a eles ou apenas os pressupondo como de domínio do leitor. Várias das dificuldades, por outro lado, parecem decorrer de decisões relativas "a não querer dizer tudo", seja para propiciar a possibilidade da prática de pesquisa aos futuros matemáticos[3], seja porque lhe foi possível ser sucinto, contrariamente ao hábito dos antigos, como dizia, de escrever demasiadamente. Descartes se movia, em muitas ocasiões, a passos largos, deixando os detalhes em aberto, também pela sua capacidade de compreender o conjunto, de unificar domínios e de captar a generalidade dos casos (sua universalidade), o que o conduziu ao mesmo tempo a certas conclusões apressadas.[4]

O que talvez mais receasse, porém, era que muitos poderiam se vangloriar de que já conheciam o que *A Geometria* trazia como mais inovador. Há um número considerável de cartas que trata de um ambiente não muito amistoso entre Descartes

3 Em razão da perspectiva epistemo-metodológica de que ser sábio é saber resolver problemas de forma autônoma e de o que mais importa é ser capaz de aprender e de descobrir verdades – e não simplesmente possuí-las e demonstrá-las –, o estilo de *A Geometria* contempla a perspectiva de deixar tarefas em aberto para pesquisas futuras, dando a oportunidade do exercício e da aprendizagem aos novos pesquisadores. Cf., a respeito, a última frase da obra (AT VI, p. 485).

4 A linguagem algébrica inaugurada por Descartes permitiu condensar o cálculo (e os livros) e lhe dar generalidade, ao mesmo tempo em que, na época, dificultou a sua leitura: é o que há de mais familiar para nós, contrariamente ao seu contraponto geométrico, a construção, hoje em desuso.

e, principalmente, os “analistas”, nas quais aparecem disputas, incompreensões e informações cruzadas que alimentaram a correspondência no período que se seguiu à publicação. Vale a pena citar o trecho da carta a Mersenne, de 31 de março de 1638, em que constam vários desses elementos. Diz Descartes:

> Mas o bom é que, no tocante a essa questão de Pappus, eu não coloquei senão a construção e a demonstração inteira, sem pôr toda a análise, a qual eles imaginam que apenas ela eu coloquei, no que testemunham que disso entendem bem pouco. O que os engana, porém, é que eu faço a construção como os arquitetos fazem os edifícios, apenas prescrevendo tudo o que é preciso fazer, deixando o trabalho manual aos carpinteiros e aos marceneiros. Eles tampouco conhecem minha demonstração, porque eu falo por meio de *a, b*. O que não a torna, contudo, em nada diferente daquela dos antigos, exceto que, dessa maneira, eu posso colocar numa linha aquilo com o qual eles enchiam várias páginas, e por essa razão ela é incomparavelmente mais clara, mais fácil e menos sujeita ao erro que a deles. Quanto à análise, eu omiti uma parte, a fim de reter os espíritos maldosos em seu dever; pois, se eu a tivesse dado toda, eles iriam se vangloriar de conhecê-la muito tempo antes, ao passo que, desse jeito, eles não podem falar nada dela que não revele a sua ignorância. (AT II, p. 83, l. 5-26).[5]

Afora essas considerações indicadas, algumas dificuldades são decorrentes da complexidade da matéria[6] e da estrutura do texto, bem como da diversidade das “fontes” a partir das quais *A Geometria* fora gerada, tema que será tratado a seguir.

Suas fontes

Podemos agrupar em quatro conjuntos os principais documentos cartesianos que contribuíram para a formação e a gênese de parte significativa do texto de *A Geometria*.[7]

Os primeiros documentos nos remetem a Descartes ainda jovem, antes mesmo de seus famosos sonhos de novembro de 1619. Os textos mais importantes dessa época são uma carta a Beeckman, de 26 de março de 1619 (AT X, p. 154-160), e alguns extratos das *Cogitationes Privatae*, de 1619-1621 (AT X, p. 213-248).

Na carta de 26 de março de 1619, concomitantemente à sua clara proposição de um programa matemático de pesquisa de alcance geral, Descartes fala da invenção de compassos e do estabelecimento de uma correspondência entre números e curvas, temas retomados em *A Geometria*. Os compassos comentados na carta – que figuram nos extratos das *Cogitationes Privatae* – são de dois tipos e servem à

5 Atente-se aqui para as três etapas do método cartesiano, como se verá mais adiante. Cf. também outras cartas, algumas indicadas aqui (AT II, p. 30-31; II, p. 510-512; V, p. 142-143).

6 Em particular a dicotomia – e, ao mesmo tempo, a sua perspectiva de unificação – entre elementos de natureza geométrica e elementos de natureza aritmético-algébrica é fator de origem das principais tensões teóricas da obra e a maior razão da diversidade de interpretações existentes.

7 Dentre as várias obras que podem ser consultadas sobre o tema das fontes e antecedentes de *A Geometria*, podemos citar as obras de Bos (2001) e de Shea (1991).

resolução do problema da trissecção do ângulo e de equações cúbicas. Eles antecipam o uso do princípio mecânico do compasso de esquadros deslizantes do início do Livro II de *A Geometria* e inovam quanto à utilização de uma máquina geradora de curvas úteis à resolução de equações. Quanto às relações entre números e curvas, Descartes estabelece uma correspondência tripla, termo a termo, entre números racionais, surdos (irracionais) e imaginários, por um lado, e curvas geométricas, geométricas ampliadas pelos compassos propostos e curvas "imaginárias" (ainda não denominadas de mecânicas), por outro.[8] Trata-se da primeira tentativa de correspondência entre magnitudes contínuas e magnitudes discretas, objetos com natureza distinta, algo não apenas audacioso, mas que revela a busca de um conhecimento universal e unificador. A classificação das curvas em três tipos tem como critério fundamental a geração contínua do movimento que as engendra, também mantido nas *Cogitationes Privatae* e em *A Geometria*. A correspondência entre números e curvas, por sua vez, parece dever ser interpretada apenas como uma analogia entre dois grupos de entidades, não tendo Descartes ainda desenvolvido a ideia de correspondência entre curvas e equações, e sendo a diferença entre curvas geométricas e "imaginárias" relativa à sua forma de traçamento e não à sua expressão algébrica.[9] Finalmente, aparecem nessa carta características de um programa amplo de resolução de problemas matemáticos, com o objetivo de resolvê-los todos – algo conservado, como vimos acima, no anúncio de publicação de *A Geometria* –: "eu quero propor não algo como uma *Ars Brevis* de Lúlio, mas uma ciência completamente nova, pela qual podemos de modo geral resolver todas as questões que se podem propor relativamente a todos os gêneros de quantidades, tanto contínuas quanto descontínuas". E, assim, dirá Descartes, "praticamente nada mais permaneceria para ser encontrado em Geometria", o que levou Beeckman, em margem à carta, intitular a proposta do amigo como uma "arte geral voltada a resolver todos os problemas" (AT X, p. 156, nota d).

As *Cogitationes Privatae* (1619-1621), por sua vez, contemporâneas do encontro com Beeckman e do período dos sonhos, apresentam os compassos anunciadas na carta de 26 de março. Além de um compasso útil à trissecção do

8 Cf. o texto: "Da mesma forma que, na Aritmética, certas questões se resolvem com a ajuda de números racionais, outras por meio de números surdos e outras, enfim, podem ser imaginadas mas não resolvidas, assim, com respeito à quantidade contínua, espero demonstrar que certos problemas podem se resolver usando apenas linhas retas e círculos, que outros não se deixam resolver senão por meio de outras linhas curvas, mas que têm sua origem em um movimento único, e por essa razão podem ser traçadas com a ajuda de meus novos compassos, os quais não avalio como menos exatos e menos geométricos que os usuais compassos pelos quais são traçados os círculos, enfim, que outros problemas se podem resolver apenas com a ajuda de linhas engendradas por distintos movimentos que não são mutuamente subordinados, cujas curvas, com certeza, são somente imaginárias, como é o caso da quadratriz, curva muito famosa" (AT X, p. 157).

9 Diz Descartes sobre uma curva chamada *linea proportionum* (também imaginária, investigada com relação ao problema da queda dos corpos): "A *linea proportionum* deve ser associada à quadratriz; esta última realmente se origina de dois movimentos não subordinados mutuamente, um circular e outro retilíneo" (AT X, p. 222-223).

ângulo (AT X, p. 240-241) – passível de ser estendido a uma divisão de *n* partes iguais –, Descartes apresenta, por duas vezes, o compasso de esquadros deslizantes (chamado "*mesolabum*"), utilizado na resolução de equações cúbicas (AT X, p. 234; 238). O mecanismo permite a inserção de médias proporcionais e consiste no uso de consecutivas perpendiculares cujas interceptações estão em progressão geométrica, princípio idêntico ao apresentado no início do Livro II de *A Geometria*. Descartes examina casos gerais e particulares de equações de 3º. grau e casos simples de equações biquadradas. A linguagem algébrica das *Cogitationes* não é a de *A Geometria* e, sim, a cóssica, praticada no colégio La Flèche por meio dos textos de Clavius.[10]

Uma segunda fonte de formação do conteúdo do terceiro ensaio do método diz respeito à construção de duas médias proporcionais (e à duplicação do cubo) por meio de uma parábola e de um círculo. Embora a descoberta seja de difícil datação, visto que só há registros posteriores, ela não deve ter sido posterior aos anos de 1625-1626, quando Descartes, estando em Paris, a comunicou a alguns matemáticos, dentre os quais Mydorge, que elaborou uma prova e a mostrou a Descartes.[11] Alguns anos depois, em 1628, quando novamente se encontram, Descartes a mostra para Beeckman (que a copiou em seu *Diário*), juntamente com a prova elaborada por Mydorge. Nessa ocasião, o uso da parábola e do círculo é ampliado para além do problema da determinação das duas médias proporcionais e se põe como forma geral para a construção das raízes de equações de terceiro e quatro graus, função que será conservada em *A Geometria*. Descoberta avaliada inédita pelo próprio Descartes, sumamente notável nas palavras de Beeckman e metodologicamente fundamental por Mersenne,[12] visto que, ao contrário das soluções propostas até então, baseadas em duas cônicas (uma parábola e uma hipérbole ou duas parábolas), Descartes a fez de forma mais simples, por meio de uma seção cônica apenas e a mais simples, a parábola: Descartes havia percebido ter descoberto a solução mais simples possível para a resolução dos problemas sólidos, tendo-a mantido em *A Geometria*, em 1637.

Tais resultados a partir de 1625 mostram, segundo salienta Bos (2001, p. 259), que a álgebra se torna cada vez mais importante e os instrumentos cada vez menos, ao mesmo tempo em que aparece a importância da redução de problemas a equações, algo ainda não explícito em 1619 e que se tornará central como primeira etapa do método: problemas devem ser reduzidos a equações, para, depois, fornecerem as construções geométricas, o que mostra a imbricação entre as duas disciplinas e o papel da análise algébrica como ferramenta útil à geometria. Finalmente, tendo sido capaz de propor uma forma de resolução geral para todos os problemas sólidos, pautada em um procedimento da forma mais simples possível (e

10 Segundo Serfati (1993, p. 206-207), na época das *Cogitationes Privatae* Descartes desconhecia os trabalhos dos algebristas italianos sobre as equações de 3º. grau, algo, por um lado, surpreendente, mas, por outro, compreensível, tendo em conta que a *Álgebra* de Clavius ignorava tais equações.

11 Mersenne publicou a construção elaborada por Descartes, sem mencionar seu nome, em sua *Harmonia Universal* em 1636.

12 Algo pautado por Descartes em *A Geometria*.

embora a transcrição dada por Beeckman tenha sido dada sem símbolos algébricos), as generalizações posteriores devem ter se pautado mais na álgebra do que nos instrumentos geométricos; e, equacionados os problemas planos (equações lineares e quadráticas) por meio de régua e compasso, e os sólidos (equações de terceiro e quarto graus) pelo uso de uma parábola, caberia uma investigação de problemas e equações mais complexos.

Um terceiro texto com o qual *A Geometria* mantém relações muito fecundas e de ordens variadas são as *Regras para a Direcção do Espírito*, obra póstuma cuja composição, incompleta, se supõe ter ocorrido entre 1620 a 1628 (ou mesmo nestes últimos anos). Dado que as *Regras* são bastante conhecidas, havendo vários estudos sobre elas, serão feitas apenas algumas observações, principalmente a respeito de seu "segundo livro".[13]

A primeira regra a ser digna de nota é a Regra 4. Nela aparecem a noção de *mathesis universalis* e uma reflexão sobre o método. A *mathesis universalis* não apenas estabelece a ordem e a medida como critérios para que um objeto possa ser conhecido, mas, também, funciona como "sistema categorial" responsável pela determinação de um domínio de conhecimento, caso em que a medida parece ser extremamente fundamental. *A Geometria* ilustra esse último ponto em, pelo menos, dois momentos. O primeiro ocorre nas primeiras páginas de seu Livro I, quando Descartes opera a "unificação" entre geometria e aritmética, entre grandezas contínuas e discretas, pela introdução da noção de unidade. Como dirão as Regras 14 e 18, sendo a unidade essa "medida" ou "natureza comum" (Descartes, 1985, p. 92; p. 100; p. 102; AT X, p. 440; p. 449-50; p. 451), ela se configura como "a base e o fundamento de todas as relações" (Descartes, 1985, p. 114; AT X, p. 462). No início do Livro II, por sua vez, Descartes define a geometria como a ciência que trata do "que é preciso e exato"; e é preciso e exato aquele domínio de objetos dos quais temos "um conhecimento exato de sua medida". A medida, portanto, delimita o campo da geometria em contraposição ao que é mecânico, vindo a ordem a atuar no interior desse domínio, tendo como parâmetro a menor ou maior simplicidade das entidades constituinte: com feito, "não se devem excluir as linhas mais complexas nem as mais simples", desde que se possa "sempre ter um conhecimento exato de sua medida" (AT VI, p. 389-90; p. 390; cf. tb. p. 392).[14] A Regra 4 faz referência também à análise dos antigos, útil à "solução de todos os problemas" (Descartes, 1985, p. 25; AT X, p. 373), e à álgebra dos modernos, seu prolongamento – bem como a Pappus e a Diofanto (Descartes, 1985, p. 28; AT X, p. 376) –, expressões espontâneas dos

13 A pretensão de Descartes era escrever três livros de doze regras. O texto foi interrompido na Regra 21, contendo as Regras 19-21 apenas seus enunciados.

14 Em geral se considera, no pensamento cartesiano, a ordem mais importante do que a medida. Contudo, diz a Regra 14: introduzida a unidade, é possível dispor as grandezas "numa tal ordem que a dificuldade, que se relacionava com o conhecimento da medida, depende apenas da ordem: é neste progresso que a arte nos é do maior auxílio". Não seria a ordem um critério interno à certa disciplina e posterior à constituição de um domínio científico pela medida?

princípios constituintes da metodologia cartesiana, algo confirmado pelo *Discurso do Método* e por *A Geometria*.

Outra regra digna de nota é a Regra 13, cujo núcleo central diz respeito ao que se poderia chamar de uma "teoria geral dos problemas" e de sua resolubilidade.[15] Dentre seus princípios norteadores se destacam o de bem compreender uma questão em seus aspectos fundamentais, o de reconduzi-la à sua forma mais simples, mas principalmente o de que todo problema é composto de, pelo menos, três elementos, o conhecido, o desconhecido (incógnito) e as relações e condições determinantes entre eles. Atenção especial recebe o elemento desconhecido, seja porque sem ele não há o que procurar nem o que conhecer, seja porque ele só pode ser procurado por meio de sinais que permitem prefigurá-lo, devendo ser designado de algum modo. A Regra 21 (seu cabeçalho), depois de a Regra 19 afirmar que haverá tantas equações quantos são os termos desconhecidos, afirmará a necessidade de reduzi-las a uma única e em sua forma mais simples possível (aquela cujos termos ocuparão o menor grau na série ordenada das grandezas continuamente proporcionais).

As Regras 14 e 15 vinculam a teoria da resolutividade de problemas, apresentada na Regra 13, às regras seguintes, a partir da noção de natureza comum (unidade), fundamento das comparações e das relações. Disso surge a noção de equação: uma vez homogeneizadas, as grandezas, contínuas ou discretas, podem ser submetidas a relações de proporções e de igualdades, havendo na equação tantas dimensões quantas houver nos objetos comparados. As regras posteriores introduzem um esboço de uma notação algébrica, ainda subordinada a uma função mnemotécnica (algo evocado em *A Geometria* (AT VI, p. 372)), à economia das palavras e à simplicidade expressiva. A Regra 17 insiste no exame da interdependência entre objetos conhecidos e desconhecidos e na desconsideração, "suposto conhecido o que é desconhecido", da diferença epistêmica entre eles: podemos incluir as coisas que procuramos conhecer "entre as conhecidas ainda que desconhecidas, para daí deduzirmos pouco a pouco e pelos verdadeiros raciocínios todas as coisas mesmo conhecidas, como se fossem desconhecidas" (Descartes, 1985, p. 112-3; AT X, p. 460-61). A Regra 18, finalmente, estipula como necessárias apenas as operações aritméticas e discute a possibilidade de seu tratamento geométrico, ao mesmo tempo em que introduz a notação simbólica consumada definitivamente em *A Geometria*. E, assim, as *Regras* antecipam vários elementos que compõem os dois primeiros blocos do Livro I de *A Geometria*.

Uma quarta fonte determinante de *A Geometria* circunscreve-se ao redor do que virá a se constituir o famoso "problema de Pappus", problema que ocupa a parte final do Livro I e parte substancial do Livro II, e que, além disso, é determinante da estrutura e dos resultados da obra. O problema de Pappus foi proposto por Golius em 1631 e resolvido por Descartes neste mesmo ano, depois de cinco a seis semanas de trabalho. Embora não haja registro do teor e dos detalhes da solução original de

15 Sobre isso, cf. Battisti (2002, p. 245-252). As regras seguintes dão continuidade à perspectiva traçada pela Regra 13 (Battisti, 2002, p. 237-260).

Descartes, parece ter sido ela bastante completa e próxima da apresentada em *A Geometria*. Numa carta a Mersenne, de 3 de maio de 1632, Descartes afirma tê-lo solucionado, e reconhece que foi "preciso ir muito além das seções cônicas e dos lugares sólidos, para resolvê-lo em qualquer número de linhas dadas" (AT I, p. 245, l. 16-18). A resolução cartesiana, como veremos, rompe com os limites impostos pela geometria grega (reconhecida pela própria apresentação pappusiana), se estendendo a qualquer número de linhas e, assim, pretendendo ser a mais geral possível.

Há um conjunto relativamente grande de cartas que fazem referências ao problema de Pappus, algumas antes da publicação de *A Geometria* e muitas delas depois.[16] O problema serviu também como objeto de debate entre matemáticos da época e alimentou a rivalidade entre alguns deles; ele é um primeiro indicativo do papel central de Pappus, como "historiador da matemática", para Descartes e para os matemáticos da segunda metade do século XVI e do início do século XVII. O problema de Pappus e o papel desse autor serão retomados mais adiante.

Estes são os principais registros cartesianos a partir dos quais o terceiro ensaio fora gerado, embora outros textos, extratos e cartas poderiam ser aqui incluídos. O debate nas cartas será mais intenso, contudo, após a publicação do ensaio, e vários fragmentos também são posteriores ou de datação incerta. Merecem menção as peças de número 10, 11 e 12 dos *Excerpta Mathematica* (AT X, p. 310-324), as quais são um estudo preliminar da teoria das ovais apresentada na parte final do Livro II de *A Geometria*.

Herdeira de um programa de pesquisa

A Geometria é tanto um texto emergente no contexto da matemática de seu tempo quanto uma obra de diálogo com o passado clássico e de abertura a um futuro ao mesmo tempo promissor e imprevisível. O seu Livro III é aquele que melhor evidencia sua inserção dentro do espírito da álgebra nascente, na medida em que apresenta uma teoria das equações e propõe regras e procedimentos (vários deles já conhecidos) relativos à manipulação e redução das equações, com o intuito – neste caso indo além dos seus antecessores – de propor soluções para equações de graus cada vez mais elevados. Descartes também avança em relação ao seu tempo, quando propõe uma notação matemática efetivamente simbólica e universal, e não mais sincopada nem decorrente de abreviações ou variável de uma língua ou tradição para outra. A nomenclatura introduzida por ele é a nossa, o que faz de *A Geometria*,

16 Há, conforme elenca Warusfel (2010, p. 83-84), pelo menos quatorze cartas que tratam do problema de Pappus, seis delas anteriores à publicação de *A Geometria*. As restantes apresentam comentários e críticas variadas, destacando-se o embate entre Descartes e Roberval. Seguem as principais, escritas a: Golius, janeiro de 1632 (AT I, p. 232-236); Mersenne, 5 de abril de 1632 (AT I p. 244); Mersenne, 3 de maio de 1632 (AT I, p. 245); Mersenne, junho de 1632 (AT I, p. 256); Stampioen, final de 1633 (AT I, p. 278); Mersenne, abril de 1634 (AT I, p. 288); Mersenne, final de dezembro de 1637 (AT I p. 478-9); Mersenne, 31 de março de 1638 (AT II, p. 83-4); De Beaune, 20 de fevereiro 1639 (AT II, p. 510-2).

como alguém já disso, o texto mais antigo de matemática que um estudante atual consegue lê-lo.

Embora a álgebra tenha tido um papel absolutamente relevante no ensaio e tenha se tornado cada vez mais central, a ponto de os intérpretes se digladiarem ao redor de uma leitura predominantemente algébrica ou predominantemente geométrica, o ponto de partida cartesiano é claramente geométrico. Como tal, o núcleo desencadeador de suas pesquisas é procedente da tradição geométrica grega, o que evidencia o fato de ter redigido uma *geometria* e não uma *álgebra*. Dentro desse quadro, mais fundamental do que outros textos do pensamento científico clássico ou do período imediatamente anterior foi o acesso à tradução da *Coleção Matemática* de Pappus: traduzida por Federico Commandino (1ª. ed., 1588),[17] a *Coleção* foi a obra que marcou mais profundamente a mentalidade cartesiana (e também o quadro de investigações e de concepções matemáticas da segunda metade do século XVI e do início do século XVII), estando na origem de suas pesquisas matemáticas e metodológicas de forma inigualável.[18] Pappus foi, sem sombra de dúvida, o matemático de maior ascendência sobre Descartes, tendo-lhe proposto um programa de pesquisa e um "perfil" a esse programa.[19]

São vários os elementos que certificam essa tese. O primeiro deles, e mais importante do ponto de vista da estruturação de *A Geometria*, diz respeito à classificação pappusiana (e grega) dos problemas geométricos em "planos", "sólidos" e "lineares", e à relação das curvas utilizadas na resolução de cada grupo. Essa classificação – reproduzida quase que literalmente nas primeiras linhas do Livro II de *A Geometria* – é um dos pilares a partir dos quais Descartes estrutura o seu tratado e o divide em três livros. Com efeito, Descartes procede a uma reclassificação da divisão pappusiana e, em razão disso, divide sua obra em três livros, o Livro I se referindo aos problemas planos, e o Livro III à construção dos problemas sólidos e mais do que sólidos, separados pelo Livro II, que trata das curvas (inicialmente, as mesmas indicadas por Pappus) necessárias à solução dos problemas mais complexos que os planos. É evidente o paralelismo entre os desafios trazidos por Pappus e a empreitada cartesiana. Segue uma das passagens da *Coleção*, localizada no seu Livro III (cujo texto paralelo cartesiano, como já dito, se encontra no início do Livro II de *A Geometria* (AT VI, p. 388)):

---

17 Federico Commandino (1506/1509? - 1575) traduziu e publicou sucessivamente várias obras de matemáticos e cientistas gregos, dentre as quais se encontram a obra de Pappus.

18 Embora a *Coleção* tenha sido publicada apenas postumamente em 1588, tendo Commandino falecido em 1575, já circulavam na época, entre humanistas e matemáticos, cópias manuscritas do texto grego.

19 Do ponto de vista matemático, as *Cônicas* de Apolônio também foram fundamentais para Descartes e se constituem no segundo texto mais citado por ele. A *Coleção* de Pappus e as *Cônicas* de Apolônio são as únicas obras que Descartes cita textualmente em *A Geometria* e indica os locais aos quais ele está se referindo. Sobre as *Cônicas*, ver as obras de Apolônio (1952; 1961).

> Os antigos afirmaram que há três espécies de problemas geométricos: alguns são chamados planos, outros sólidos e outros lineares ["grâmicos"]. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de linhas retas e da circunferência do círculo são corretamente chamados de planos, porque as linhas por meio das quais esses problemas são resolvidos têm sua origem no plano. Mas aqueles problemas que devem ser resolvidos invocando na construção uma ou mais seções cônicas são chamados sólidos, porque, para a sua construção, é necessário o uso de superfícies de figuras sólidas, notadamente de superfícies cônicas. Resta uma terceira espécie de problemas, chamados lineares ["grâmicos"], porque, para a sua construção, além das linhas mencionadas, eles assumem outras com origem inconstante e variável, tal como as espirais e as curvas que os gregos chamam <*tetragonizousas*>, e as quais podemos chamar "quadrantes", concoides e cissoides, as quais têm muitas propriedades admiráveis (Pappus, 1982, p. 38-39; Pappus, 1588, p. 4).[20]

Em sequência ao texto supracitado – e esse é o segundo ponto –, Pappus faz referência à distinção entre curvas geométricas e instrumentais, seguido mais uma vez de forma análoga por Descartes no início do Livro II (AT VI, p. 388-90). Diz Pappus:

> Sendo esta, pois, a diferença existente entre os problemas, os antigos geômetras não puderam construir o problema previamente citado (...); mas eles foram bem-sucedidos de uma maneira admirável, entretanto, ao se utilizarem de instrumentos próprios para executar a construção de forma manual e comodamente, como se pode constatar no *Mesolabum* de Erastóstenes e nas *Mecânicas* de Philon e de Heron. Com efeito, esses últimos, tendo admitido o problema como sólido, efetuaram a construção unicamente de uma maneira instrumental [...] (Pappus, 1982, p. 38-39; Pappus, 1588, p. 4).

Embora devamos admitir que os antigos não dispusessem de um quadro geral bem definido sobre quais construções eram aceitas ou não em geometria,[21] é certo que Pappus discute em vários momentos, sob ângulos distintos, a distinção entre curvas geométrica e curvas instrumentais ("orgânicas") ou mecânicas.[22] Não parece exagero afirmar que Descartes tenha se sentido desafiado pela falta de critérios bem estabelecidos e pelas dificuldades relativas à classificação dos problemas geométricos e à divisão das curvas utilizadas na sua resolução.[23]

O terceiro item que evidencia as fontes pappusianas do programa de pesquisa cartesiano encontra-se na sequência da passagem do Livro IV da *Coleção* (mencionada, aqui, em nota) relativa à classificação dos problemas: havendo soluções adequadas e

20 Há outra passagem, praticamente idêntica, no Livro IV (Pappus, I, p. 206-208; Pappus, 1588, p. 61).

21 Ver a respeito Molland (1976).

22 A concoide de Nicomedes, por exemplo, aí é dita ter sido traçada instrumentalmente (Pappus, 1982, p. 187) e a quadratriz, ser excessivamente mecânica (1982, p. 194, 197), ao mesmo tempo em que, no Livro VIII, devotado à ciência mecânica e ao status desses problemas (Pappus, 1982, p. 845; 860), curvas desse gênero são avaliadas "mais positivamente".

23 Sobre isso, cf. a longo parágrafo inicial do Livro II de *A Geometria* (AT VI, p. 388-90).

inadequadas, Pappus se refere nessa passagem do Livro IV a um "não insignificante pecado", a um "*peccatum non parum*" (Pappus, 1588, p. 61), cometido por geômetras quando resolvem um problema por meio de uma curva inapropriada: "Ademais, parece ocorrer um erro considerável entre os geômetras quando encontram um problema plano por meio das cônicas ou das lineares [grâmicas] e, de uma maneira geral, quando o resolvem por meio de um gênero de curvas inapropriado" (Pappus, I, 1982, p. 208; Pappus, 1588, p. 61). Ao estabelecer esse "preceito metodológico" (Bos, 2001, p. 49), Pappus propiciou a Descartes a oportunidade, no início do Livro III de *A Geometria*, da discussão a respeito de dois erros que se devem evitar na construção das linhas-solução dos problemas, um dos quais (pelo menos), aquele que não respeita o princípio da simplicidade, já apontado por Pappus.

Esses três fatores (a classificação dos problemas geométricos, a distinção entre curvas geométricas e instrumentais (mecânicas), e a indicação de um princípio metodológico relativo ao uso correto das curvas), cada qual propondo dificuldades e desafios imersos em uma mesma concepção de ciência geométrica, têm um completo paralelismo na estrutura de *A Geometria*, de sorte que não parece aceitável reduzir a simples coincidências a correspondência entre o quadro trazido por Pappus e o programa investigativo cartesiano.

Um segundo conjunto de elementos que evidencia o papel da obra de Pappus como inspiração de *A Geometria* é o lugar ocupado por problemas matemáticos "importados" da *Coleção*, dentro os quais o mais importante é o problema de Pappus. Descartes cita literalmente (AT VI, p. 377-9) o texto do Livro VII de Pappus ao longo de quatro parágrafos (Pappus, 1982, p. 507-10; Pappus, 1588, p. 164-5) e depois o examina longamente tanto no Livro I (AT VI, p. 379-87) quanto no Livro II (AT VI, p. 396-411).[24] Os comentadores cartesianos são unânimes em afirmar a centralidade do problema de Pappus, mas aqui vale ressaltar o fato de que Descartes o transcreve literalmente e o examina exaustivamente, necessitando ter o texto em mãos e sob os olhos. Retornaremos ao problema de Pappus mais adiante, e esse registro aqui é suficiente. Descartes examina, entretanto, outros temas apresentados ou sugeridos por Pappus, como é o caso das curvas estudadas por ele, as quais, como já nos referimos, são inicialmente as mesmas referidas por Pappus. Vale indicar a ocorrência de outro problema, examinado por Descartes no Livro III (AT VI, p. 462-3), que é retirado diretamente de Pappus: trata-se da Prop. 72 do Livro VII da *Coleção* (Pappus, 1982, p. 606-608; Pappus, 1588, p. 206-207). E, assim, os três livros de *A Geometria* pressupuseram a consulta efetiva ao texto de Pappus durante a sua redação. E, embora haja referências também a Apolônio (por vezes bem precisas e pontuais, como é caso de algumas proposições das *Cônicas*, tendo Descartes necessidade aí também de uma consulta direta ao texto – atente-se que Pappus está comentando as *Cônicas* no local em que é retirado o problema que

24 Sugerido o problema por Golius em 1631.

recebera seu nome), nada se compara ao impacto do texto de Pappus e à necessidade de tê-lo à mão no momento da redação do terceiro ensaio do método.[25]

A *Coleção* também parece ter sido fundamental para Descartes como uma obra de "história da matemática": é significativo o número (mais de uma dezena) de vezes em que Descartes faz referência aos "antigos" para avaliar seu legado matemático e metodológico, em algumas dessas ocasiões citando explicitamente Pappus como sua fonte. Pertencente à tradição de comentadores ("historiadores") que viveram na antiguidade tardia, Pappus, tendo vivido em uma época "mais recente",[26] utiliza constantemente a expressão "os antigos" – e Descartes igualmente[27] – para se referir aos geômetras do período clássico. A *Coleção* recolhe um vasto conjunto de proposições atinentes a um grande número de obras matemáticas quase todas elas perdidas, e Pappus as comenta, acrescenta demonstrações, as relaciona a novos problemas ou a problemas resolvidos de outros modos, além de discutir sobre temas, autores e questões da "história da matemática" grega, trazer resultados de suas pesquisas e levantar dificuldades teóricas e metodológicas de ordens diversas. Diferentemente de outros comentários matemáticos da época[28] (e, mesmo, do período de Descartes[29]), devotados aos *Elementos* de Euclides e, majoritariamente, à "geometria ordinária", o legado pappusiano evidencia e propulsiona pesquisas mais avançadas e pertinentes a uma "matemática superior".

Dito isso, seria ainda parcial considerar a importância da obra de Pappus sem uma avaliação mais ampla de sua contribuição em termos metodológicos. A *Coleção*, nos primeiros parágrafos do Livro VII, apresenta a mais completa e quase única descrição do famoso método de análise (e síntese) dos antigos geômetras, cujo "caráter secreto" fascinou tantos intelectuais renascentistas e do início da

25 Embora seu nome apareça algumas vezes em razão de Pappus tê-lo citado, Euclides não faz parte dos interlocutores de Descartes nem em *A Geometria* nem nas outras obras. É equivocada a afirmação de Gueroult de que os *Elementos* eram, para Descartes, "um livro de cabeceira" (1953, I, p. 61, n. 27; II, p. 288-9; 2016, p. 71, n. 27; p. 769-70); e isso por duas razões no mínimo: Descartes não se interessa por problemas elementares de geometria, fazendo referência a eles (em bloco), no Livro I de *A Geometria*, apenas para mostrar sua superioridade frente aos gregos (cf. mais adiante); o método cartesiano é analítico, e o dos *Elementos* é sintético. Cf. a carta a Frenicle, de 9 de janeiro de 1639 (AT II, p. 472), em que Descartes está discutindo problemas sugeridos por seus correspondentes: "sobre isso eu sei tão pouco que não faz ainda um ano que eu ignorava as assim denominadas partes alíquotas de um número, e que precisei emprestar um Euclides para aprender a respeito" (AT II, p. 471-2). Cf. também a carta de Pell para Cavendish, de dois de outubro de 1646 (AT IV, p. 729-32).

26 Como diz Descartes na Regra IV, "Pappus e Diofanto (...), sem serem dos primeiros tempos, viveram (...) muitos séculos antes da nossa era".

27 Diz Descartes: "ele [Pappus] acrescenta que os antigos" (AT VI, p. 380); "aquilo que Pappus nos diz ter sido procurado nisso pelos antigos" (AT VI, p. 382). Em outras ocasiões, Descartes fala dos antigos de forma muito semelhante como faz Pappus, como na citação fornecida mais acima, a respeito da classificação dos problemas geométricos.

28 Os comentários matemáticos mais famosos de Theon de Alexandria e de Proclus dizem respeito aos *Elementos* ou a parte deles.

29 Tal é o caso de Clavius, cujas obras foram bastante influentes na educação de Descartes.

modernidade. Descartes e Viète são os mais entusiastas, tendo ambos se proposto a "resgatá-lo" cada um a seu modo: Viète visa recuperá-lo, melhorá-lo e estendê-lo para outras áreas da matemática, razão pela qual escreve uma *Introdução à Arte Analítica*, além de, juntamente com outros matemáticos mais jovens, se propor a reconstituir boa parte das obras analíticas perdidas dos geômetras antigos (em especial as de Apolônio), a partir das informações dadas por Pappus, neste mesmo local da *Coleção*,[30] a respeito do "tesouro da análise"; por sua vez, embora emergente da matemática e por ela ilustrado, a análise é, para Descartes, é expressão do *modus operandi* da capacidade humana de conhecer em geral, podendo, por isso, se estender para toda e qualquer área ou disciplina.

O tema do método de análise (e síntese) é de extrema complexidade, seja ele circunscrito à antiguidade grega, seja ele atinente ao período moderno e pré-moderno ou ao âmbito do pensamento cartesiano. Há estudos especializados sobre o tema nessas diferentes épocas, e aqui serão feitas apenas duas observações.[31]

A primeira é que o método de análise (e síntese) dos gregos é mencionado por Descartes em várias de suas obras, desde as *Regras*, como já vimos, mas também na Segunda Parte do *Discurso do Método* e, principalmente, no final das *Segundas Respostas* (AT VII, p. 155-9; IX-1, p. 121-3; Descartes, 1983, p. 166-8). Além disso, as *Meditações* são escritas analiticamente, e os três tratados que seguem o *Discurso* são ensaios *do método*, sendo *A Geometria*, pelo menos, claramente escrita dentro do quadro e da dinâmica do procedimento analítico. Descartes sempre se mostrou entusiasmado pelo modo como são descobertas as verdades e pela capacidade humana de "inventá-las", sendo a análise o método capaz de canalizar as forças relativas a essa tarefa. A álgebra, sob este aspecto, é considerada um prolongamento do procedimento analítico geométrico; e, nesse sentido, os componentes algébricos de *A Geometria* não depõem contra a influência pappusiana, mas, ao contrário, são um reforço indireto dessa herança grega. Sendo praticamente o único testemunho descritivo existente do método de análise (e síntese) (Pappus, 1982, p. 477-8; Pappus, 1588, p. 157), seguido, por sua vez, pela apresentação do *corpus* analítico dos antigos, não há como negar a influência metodológica da *Coleção* no pensamento cartesiano.

30 A *Coleção*, depois de definir os procedimentos analítico e sintético, traz informações das doze obras componentes do assim chamado "tesouro" ou "*corpus* da análise", das quais um bom número delas fora reconstituído pelo "grupo" de Viète e seus discípulos (visto que apenas duas existiam em 1600). Descartes, embora faça referência em sua correspondência ao grupo, não participa de projetos do gênero. Tais obras antigas continham resoluções de problemas (e provas de teoremas) que seriam úteis na resolução de outros problemas. Das doze obras do *corpus*, eram existentes no início da modernidade apenas *Os dados* de Euclides e *As cônicas* de Apolónio, mas, a partir das informações de Pappus, outras foram reconstituídas, tendo recebido atenção especial as de Apolônio (Snellius, Ghetaldi, Anderson, Viète e Fermat publicaram reconstituições de seis tratados de Apolônio). Cf. a lista em Bos (2001, p. 83-4).

31 Sobre o assunto, especialmente para a compreensão da relação entre a perspectiva metodológica cartesiana e a dos geômetras gregos, ver, dentre outros, Battisti (2002), Dubouclez (2013), Hintikka e Remes (1974), Loparic (1997, cap. 3) e Timmermans (1995).

Atente-se que a longa passagem do problema de Pappus transcrita por Descartes (AT VI, p. 377-9) é retirada deste mesmo Livro VII da *Coleção* (Pappus, 1982, p. 507-10; Pappus, 1588, p. 164-5).

A segunda observação diz respeito à configuração desse método a partir das entidades sobre as quais ele atua. Pappus, como se sabe, na abertura de seu Livro VII, quando fornece a definição de análise e de síntese,[32] distingue dois tipos de análise, a problemática ("porística") e a teorética ("zetética"), a primeira voltada à construção dos problemas, e a segunda à prova dos teoremas. Entretanto, não há, praticamente, exemplos de análise de teoremas na literatura dos antigos ou mesmo na *Coleção*;[33] e, assim, visto que a (quase) totalidade dos exemplos de análise existentes dizem respeito à análise de problemas, essa constatação tem conduzido intérpretes a circunscrever a análise apenas (ou predominantemente) ao âmbito destes últimos. É preciso considerar também que, no conjunto das informações geométricas recolhidas por Descartes, como vimos acima, encontram-se como centrais as noções de problema e de construção. Seja como for – e por mais que essa pendência não se encontre claramente resolvida em relação aos gregos –, há um predomínio absoluto da análise como resolução de problemas na época pré-moderna e moderna, não havendo exemplos de análise de teoremas, afirma Bos,[34] nos textos dos matemáticos desse período. Viète, por exemplo, avalia os dois tipos de análise apresentados por Pappus, aos quais acrescenta um terceiro, como etapas complementares de um mesmo processo, voltado à resolução de um problema.[35] Descartes é, evidentemente, conhecedor da distinção entre teoremas e problemas, como assinalam as *Segundas Respostas* (AT VII, p. 156, l. 10-11; IX-1, p. 122; Descartes, 1983, p. 166-7); porém, não só *A Geometria* jamais se reporta a teoremas,[36] como há inúmeros textos que

32 Existem apenas dois breves textos sobre a natureza do método que podem servir de comparação com o de Pappus, o primeiro sendo uma interpolação no início do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides, e o outro apresentado por Heron em seu comentário ao Livro II dos *Elementos*, conservado na tradução árabe feita por al-Nairizi (Annaritius). Sobre tais textos, cf. Euclides (1956, I, p. 137-140; III, p. 442-443) e Knorr (1986, p. 354-55).

33 Pappus fornece apenas dois exemplos de análise de teoremas em toda a sua obra, um deles no final do Livro VII e o outro no Livro IV, não havendo, além disso, outros casos na geometria clássica, salvo alguns poucos tidos como "triviais". A análise de teoremas tem sido considerada por muitos especialistas como pouco pertinente ou mesmo inadequada. Ver especialmente Knorr (1986, p. 358-59; 378, n. 102).

34 Bos afirma (2001, p. 97, n. 7) não conhecer exemplos de análise de teoremas entre o período da publicação da *Coleção*, em 1588, até a época de *A Geometria*. Ele cita apenas uma obra (de F. van Schooten, de 1661) em que há alguns exemplos. Por outro lado, o intérprete cita uma lista de várias dezenas (Bos, 2001, p. 212-213) de obras que contém seções voltadas à resolução de problemas geométricos.

35 Com sua "arte analítica", Viète tem a pretensão de apropriar-se do "mais pomposo *problema dos problemas*: não deixar nenhum problema sem solução (*fastuosum problema problematum ars Analytice ..., Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE*)" (Viète, 1630, p. 66; Viète, 1970 (1646), p. 12; Klein, 1968, p. 185). Cf. tb. a carta de Descartes a Mersenne, de 3 de maio de 1632 (AT I, p. 245).

36 O termo "teorema" aparece apenas quatro vezes na obra, duas delas se referindo a Apolônio.

denunciam a preferência cartesiana voltada à resolução de problemas (alguns já mencionados).

Como já afirmado, *A Geometria* tem sua estrutura determinada a partir da classificação dos problemas geométricos em problemas planos, sólidos e mais do que sólidos, os quais, em seu conjunto, perfazem a totalidade dos problemas que compõem a ciência geométrica e o que a ela cabe investigar. Em razão disso, Descartes pôde afirmar, como apresentado mais acima (AT X, p. 156-7; I, p. 339-40), ter-se proposto a resolver todos os problemas matemáticos pendentes; ou, então, como diz *A Geometria*, ter reconduzido todos os problemas a um só e mesmo problema: "tudo o que cai sob a consideração dos geômetras se reduz a um mesmo gênero de problemas" (AT VI, p. 475); ou, ainda, tendo aberto a obra com uma referência a todos os *problemas da geometria* (AT VI, p. 369), uma vez hierarquizados cada qual em seu grupo, ele pôde concluí-la afirmando ter resolvido a todos eles (AT VI, p. 485).[37]

Dentro dessa mesma perspectiva, as *Regras* já afirmavam que os antigos geômetras utilizavam "uma espécie de *análise* que estendiam à *resolução de todos os problemas*" (AT X, p. 373, l. 11-15), ao mesmo tempo nos oferecendo na Regra 13, como vimos, uma teoria sobre sua resolutibilidade. Uma distinção semelhante é feita na Regra 3: "nunca nos tornaremos, por exemplo, matemáticos, embora saibamos de cor todas as demonstrações feitas pelos outros, se com o espírito não formos capazes de *resolver todo e qualquer problema* (...). Com efeito, daríamos a impressão de termos aprendido não ciências, mas histórias" (Descartes, 1985, p. 19; AT X, p. 367, 16-23; itálico nosso). Essa distinção entre atividade científica voltada à resolução de problemas e "história" (entendida como depósito de verdades encontradas nos livros) é também afirmada em uma carta a Hogelande, de 8 de fevereiro de 1640: "tenho o costume de distinguir duas coisas em matemática: a história e a ciência. Entendo por história tudo o que já tem sido descoberto e se encontra nos livros. Mas, por ciência (*scientia*), entendo *a habilidade de resolver todas as questões e de descobrir por sua própria indústria tudo o que o espírito humano pode encontrar* nessa disciplina (*scientia*)" (AT III, p. 722), algo que apenas um pesquisador "autárquico" pode reivindicar. Contrapõe-se a essa atividade aquela relativa aos registros das verdades e à sua conservação nos livros: "muitas coisas se conservam melhor nos livros do que na memória, como as observações astronômicas, as tabelas, as regras, *os teoremas* e, enfim, tudo o que não se fixa espontaneamente na memória após o primeiro conhecimento que se tem: pois, quanto menos enchermos nossa memória, mais tornamos apto nosso espírito para aumentar sua ciência" (AT III, p. 723; itálico nosso).[38]

Desse conjunto de considerações sobre o impacto da recepção da geometria clássica por Descartes, especialmente por meio da obra de Pappus, emergem,

37 O termo *problema* aparece na obra ao redor de uma meia centena de vezes.

38 Cf. também o *Entretien avec Burman* (AT V, p. 176; 1981, p. 140).

finalmente, as questões de fundo de *A Geometria*. Conforme salienta Bos, o que pulsa na obra e o que impulsiona a obra são: a insegurança herdada dos gregos relativa a quais meios devem ser utilizados na construção de problemas insolúveis com régua e compasso; a ausência de um procedimento metodológico geral para a descoberta de soluções dos problemas geométricos. A intervenção dos procedimentos algébricos será fundamental para a resolução dessas questões, ao mesmo tempo em que eles já não poderão ser aprisionados por elas.

Sua estrutura

A Geometria se compõe de três livros, o primeiro ocupando, na edição standard, 19 páginas (AT VI, p. 769-387), o segundo, 54 (AT VI, p. 388-441) e o terceiro, 44 (AT VI, p. 442-485), cada qual contendo certo número de seções assinaladas por títulos alocados às margens do texto. Embora haja diferenças de número e também de redação entre os títulos do sumário e aqueles laterais ao texto, o sumário aponta nove seções para o Livro I, 20 para o Livro II e 32 para o Livro III. O Livro I trata “dos problemas que se podem construir empregando unicamente círculos e linhas retas” (AT VI, p. 769), o Livro II, “da natureza das linhas curvas” (AT VI, p. 388), e o Livro III, “da construção dos problemas que são sólidos ou mais do que sólidos” (AT VI, p. 442).

É fornecido a seguir um quadro com os principais tópicos de cada livro.[39]

Plano de *A Geometria* (AT VI, p. 367-485)			
Livros	**AT VI**	**Seções**	**Conteúdo**
I	**369-387**	**9 seções**	**Construções de problemas planos (com régua e compasso)**
I-A	369-372	1-3	Construções geométricas correspondentes a $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }$; introdução da simbologia
I-B	372-376	4-5	O método de resolução de problemas e suas duas principais etapas: a) do problema à equação; b) da equação à construção/resolução
I-C	377-387	6-9	Problema de Pappus, parte I: construção de pontos do *locus*-solução para problemas planos
II	**388-441**	**20 seções**	**Natureza e aceitabilidade das linhas curvas**
II-A	388-396	1-2	Aceitabilidade das curvas geométricas; sua classificação
II-B	396-411	3-7	Problema de Pappus, parte II: caso de 4 linhas (solução: seções cônicas); caso especial de 5 linhas (solução: parábola cartesiana)

39 Esse quadro é retirado, em boa medida, dos estudos de H. Bos. As tabelas apesentadas por ele têm alterações entre um texto e outro (1990, p. 357; 1998, p. 303; 2001, p. 291). Um quadro semelhante foi publicado por nós na Nota Preliminar à tradução de *A Geometria* (Descartes, 2018, p. 352).

II-C	411-412	8-9	Aceitabilidade de construções ponto por ponto e por meio de cordas
II-D	412-424	10-14	Perpendiculares (normais) de uma curva e sua determinação
II-E	424-440	15-19	Ovais como forma de lentes
II-F	440-441	20	Curvas em superfícies não planas
III	**442-485**	**32 seções**	**Construções de problemas sólidos (equações de 3º. e 4º. graus) e supersólido (5º. e 6º. graus), precedidas por técnicas algébricas voltadas a tais construções**
III-A	442-444	1-2	Aceitabilidade das curvas nas construções; classificação quanto à simplicidade
III-B	444-454	3-18	Equações e suas raízes; regras de manipulação e de redução das equações
III-C	454-464	19-24	Redução de equações por fatoração
III-D	464-476	25-30	Construção de raízes de equações de 3º. e 4º. graus (problemas sólidos)
III-E	476-485	31-32	Construção de raízes de equações de 5º. e 6º. graus (mais do que sólidos)

LIVRO I

O Livro I, o menor dentre eles, diz respeito, como seu título enuncia, aos problemas que podem ser construídos pelo uso de círculos e linhas retas, isto é, por meio de régua e compasso. Trata-se dos problemas planos, segundo a nomenclatura utilizada por Pappus, um conjunto de problemas examinados exaustivamente pela tradição desde os gregos. Estando, portanto, o seu conteúdo "matematicamente esgotado", o Livro I cumpre funções relacionadas às inovações conceituais e metodológicas fundamentais para a resolução dos problemas, em especial os mais complexos (constantes nos livros posteriores).

Embora contenha nove seções, o Livro I será apresentado a partir de três blocos de temas.

O primeiro bloco (I-A, três seções) caracteriza-se por apresentar um conjunto de considerações teóricas e técnicas elementares, as quais, por essa razão, se dissolvem posteriormente ao longo do texto, passando quase despercebidas. Tais considerações dizem respeito: 1) à interpretação geométrica das operações aritméticas; 2) à introdução da noção de unidade; 3) à introdução da notação algébrica; e 4) à resolução do problema das dimensões (da homogeneidade) das partes de uma linha expressas algebricamente.

Antes disso, porém, o Livro I começa laconicamente com uma afirmação geométrica capital e em tom de princípio: "Todos os problemas da geometria podem ser facilmente reduzidos a termos tais que, para construí-los, não é necessário, depois disso, senão conhecer somente o comprimento de algumas linhas retas" (AT VI, p. 369). Trata-se de apresentar as entidades e os procedimentos metodológicos que constituem a ciência geométrica: a) fazer matemática (geometria) é resolver (todos os) problemas matemáticos; b) resolvê-los é, uma vez reduzidos à sua expressão mais simples, construí-los; c) construí-los significa construir linhas, a começar pelas retas (as mais simples), sendo as curvas determinadas subsequentemente. A entidade que condensa a pesquisa matemática e a dirige metodologicamente, como já afirmado, é a de "problema": problema é uma entidade epistemo-metodólogica antes do que matemática (embora tenha também um "sentido técnico", contraposto a teorema); Descartes pretende resolvê-los todos ou, então, o último que ainda encontra-se em aberto. De fato, *A Geometria* não se prende à enunciação de verdades, e não prioriza, rigorosamente, a sua demonstração. Por isso, a dinâmica resolutiva geométrica se concentra na sua etapa construtiva: resolver um problema é construí-lo, relação que também se remete aos gregos.[40] Se é assim, os objetos geométricos (linhas, retas e curvas) são, antes de tudo, meios para a resolução dos problemas, e não a "coisa" a ser investigada e conhecida em si mesma, gerados por composição (e ordenadas pelo grau da equação correspondente) e inseridos em um *continuum* até as curvas mais complexas. E, portanto, a geometria trata de *problemas*, cujos meios de *construção* (resolução) são *linhas* (retas e curvas).

Feitas tais considerações, as construções correspondentes às operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz) dar-se-ão sobre segmentos retilíneos, tendo como resultados outros segmentos retilíneos, graças à introdução do segmento-unidade. As duas primeiras operações (adição e subtração), contudo, não precisam da intervenção da unidade, visto que seus resultados são imediatamente determinados e homogêneos aos dados. Por sua vez, a multiplicação geométrica tradicionalmente produzia algo heterogêneo (uma área) em relação aos elementos integrantes (segmentos de retas), e algo semelhante acontecia (de modo inverso) com a divisão e com a raiz quadrada. Assim, mesmo havendo similaridades entre operações aritméticas e operações geométricas, havia dois principais obstáculos relativos à assimilação de uma a outra: 1) a mudança de dimensão dos objetos resultantes dessas operações geométricas e sua limitação à tridimensionalidade do espaço, não havendo sentido geométrico para expressões acima do cubo; 2) a diferença de natureza entre magnitudes contínuas (geométricas) e descontínuas (aritméticas). Tais obstáculos foram resolvidos por Descartes, não por uma assimilação completa das magnitudes geométricas a números, mas por combinação da introdução da unidade (aritmética) com o uso da teoria das

40 Esse conhecimento tácito relativo a uma teoria da resolubilidade de problemas parece indicar a 'coparticipação" de Descartes em um "programa de pesquisa", dominante entre os matemáticos do final do século XVI e da primeira metade do século XVII, relativo a essa teoria, por mais distintos que fossem os problemas tratados e as perspectiva sob as quais eram tratados. Cf. a respeito Bos (2001, cap. 4, 14,18 etc.).

proporções (geométrica). Assim, a multiplicação e a divisão geométricas passam a corresponder à determinação de uma quarta proporcional, sendo a unidade, na multiplicação, seu primeiro elemento (isto é, $1{:}\, a = b{:}\, x$; logo, $x = ab$) e, na divisão, seu segundo elemento ($a{:}\, 1 = b{:}\, x$; logo, $x = \frac{b}{a}$); a raiz quadrada, por sua vez, é a média proporcional entre duas retas, sendo a unidade a primeira ($1{:}\, x = x{:}\, a$; logo, $x^2 = 1.a$ e $x = \sqrt{a}$). Descartes constrói tais operações geometricamente, conforme as duas primeiras figuras do Livro I (AT VI, p. 370). A multiplicação é: $\frac{BA\,(=1)}{BD\,(=a)} = \frac{BC\,(=b)}{BE\,(=x)}$; logo, $BE = BC.BD$. A divisão é: $\frac{BD\,(=a)}{BA\,(=1)} = \frac{BE\,(=b)}{BC\,(=x)}$; logo, $BC = \frac{BE}{BD}$. Para a raiz quadrada vale a seguinte relação: $GI^2(= x^2) = FG(= 1).GH(= a)$; logo, $GI = \sqrt{GH}$.

O item seguinte do bloco I-A consiste na introdução da notação algébrica e em algumas considerações relativas ao seu uso. É Descartes quem introduz a diferença entre as letras iniciais do alfabeto (*a, b, c*, etc.) para as grandezas conhecidas e as letras finais (*x, y, z*, etc.) para as desconhecidas, bem como o modo como hoje escrevemos as equações, e é evidente a clareza e concisão quanto ao seu dinamismo operatório e conceitual. Descartes utiliza frequentemente *aa* (mas também a^2) onde utilizamos apenas a^2 (porém escreve a^3, a^4, etc.), $\sqrt{C.}$ no lugar de $\sqrt[3]{\ }$ e o símbolo $\propto$ (possivelmente inspirado na palavra *æqualis*) no lugar do atual =. Além disso, ele sinaliza por meio de um asterisco (*) a inexistência de um termo (monômio) em uma equação e por meio de um ponto (·) o sinal atual $\pm$. Depois disso, Descartes nos faz notar que expressões como a^2 e b^3 representam retas, da mesma forma que *a, b, c*, etc., embora os nomes utilizados ("quadrado", "cubo", "quadrado do quadrado", etc.) possam nos levar a mal-entendidos; e, igualmente, $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ é apenas uma linha. Finalmente, Descartes trata da homogeneidade no interior de uma expressão: uma linha deve se exprimir pelo mesmo número de dimensões em cada uma de suas partes. Assim, a última expressão dada acima é homogênea, contrariamente a esta outra, $aabb - b$, a menos que a unidade, estando determinada, possa ser subentendida para "equalizar" as partes entre si: neste caso, para se extrair a raiz cúbica de $aabb - b$ deve-se pensar as suas partes como tendo três dimensões, estando o primeiro termo dividido pela unidade e o segundo multiplicado duas vezes por ela; ou seja, deve-se considerá-la como sendo $\frac{a^2b^2}{1} - b.1.1$. Parece que a exigência da homogeneidade interna a uma expressão responde a pelo menos dois requisitos. Primeiramente, ela reflete a homogeneidade interna de cada objeto geométrico e, por extensão, de sua expressão algébrica, sendo a heterogeneidade a expressão mais geral e abrangente de ausência de "medida precisa e exata" (AT VI, p. 392). Em segundo lugar, o mesmo número de dimensões para cada uma de suas partes é uma exigência resolutiva da própria equação: para que possamos, por exemplo, extrair a raiz cúbica de uma expressão, é preciso supor que ela se deixe cubicar.

O segundo bloco (I-B, duas seções) do Livro I tem um conteúdo eminentemente metodológico. Embora haja preceitos metodológicos em outros lugares e se possa avaliar a obra toda como ensaio metodológico, é aqui que Descartes apresenta o seu método, entendido como procedimento resolutivo interno a um problema.[41] É aqui que se dá também a filiação cartesiana aos praticantes da análise geométrica, conforme já apesentado acima. Circunscrita a duas seções, a exposição cartesiana consiste na descrição das duas etapas centrais do método e na exposição de exemplos que ilustram o que se deve entender por resolução.

Descartes não atribui nome ao seu método em nenhum lugar da obra. Tampouco as etapas recebem nomes nesse momento, mas duas delas (a segunda e a terceira) são denominadas *construção* e *demonstração* nos livros posteriores; a primeira delas, a "*análise*", é denominada assim apenas na correspondência.[42] Não havendo espaço aqui para uma discussão sobre questões mais polêmicas, não se pode deixar de assinalar, contudo, a inexistência de ambiguidades quanto à estrutura do método e às suas três etapas constituintes, duas delas (a "análise" e a construção) sendo as únicas tratadas aqui, cada uma em uma seção, exatamente por constituírem suas etapas fundamentais. Outro dado inquestionável é a "filiação" metodológica cartesiana à tradição dos praticantes da análise: o método cartesiano poderá ser compreendido satisfatoriamente como arte voltada à resolução de um problema: denominado em seu conjunto de método de análise (e síntese), suas etapas serão designadas como aparecem acima, a primeira (a "análise") sendo posta entre aspas em razão da sua denominação exterior a *A Geometria* e como forma de distingui-la do procedimento resolutivo (a análise) como um todo.

A primeira etapa, apresentada na seção intitulada "Como chegar às equações que servem para resolver os problemas" (AT VI, p. 372-374), tem como principal objetivo equacionar o problema algebricamente de tal forma que a "dificuldade" seja reconduzida à sua expressão (equação) mais simples. Ela começa, como prescrevia a análise geométrica grega, por *supor o problema resolvido* ou *como tendo sido já feito*;[43] e, com isso, considerando completa a configuração do problema e tendo desfeito a diferença cognitiva (embora a notação as mantenha distintos) entre linhas conhecidas e desconhecidas, ela pode operar sem direção privilegiada até condensar na equação suas relações de dependência. Por outro lado, ainda que resolver um problema seja determinar o desconhecido pelo conhecido (ou dado), o uso metodológico do desconhecido como "dado"[44] configura o método como

41 Em um sentido mais amplo, o método englobaria também a relação entre problemas, bem como todas as estratégias e operações utilizadas pela disciplina e mesmo aquelas relativas à sua delimitação frente ao que não é matemático. Aqui ele será caracterizado no nível interno de um problema.

42 Cf., por exemplo, o trecho supracitado da carta a Mersenne, de 31 de março de 1638 (AT II, p. 83, l. 5-26).

43 Frases desse tipo são comuns no início da análise, tanto grega quanto moderna. Cf., por exemplo, Pappus (1982, L. IV, Prop. 4, p. 140; L. VII, Prop. 105, p. 640; L. VII, Prop. 155, p. 705).

44 Na geometria antiga, utiliza-se abundantemente a expressão de se "considerar um objeto como dado". Euclides escreve uma obra intitulada "Dados", que faz parte do "tesouro da análise",

procedendo contra a corrente, do desconhecido para o conhecido.[45] Como resultado tem-se, primeiramente, um número de equações correspondente ao número de linhas desconhecidas (ou, então, diante de uma questão indeterminada, atribui-se certo valor às linhas desconhecidas excedentes). Em seguida, é preciso reduzir todas as equações a uma única e com a forma mais simples possível, tendo a "análise" cumprido sua tarefa.

ESTRUTURA DO MÉTODO

1) "ANÁLISE":

1.1) Compreensão do problema e suposição de que esteja resolvido.

1.2) Atribuição de nomes aos objetos (linhas): *x*, *y*, *a*, *b*...

1.3) Exame das relações de dependência entre eles e montagem de uma equação para cada desconhecido.

1.4) Redução de todas as equações a uma única e mais simples possível.

2) CONSTRUÇÃO:

2.1) Exame da equação resultante da "análise".

2.2) Construção da raiz e resolução da equação.

A segunda etapa, a construção, apresentada nas duas seções seguintes, intituladas "Quais são os problemas planos" e "Como são resolvidos" (AT VI, p. 374-376), tem por objetivo central resolver a equação, isto é, construir a raiz (ou raízes) da equação. Nos exemplos fornecidos (problemas planos), as equações são, no máximo, de segundo grau (com uma incógnita). Supondo ter obtido na "análise" a equação $z^2 = az + b^2$, ela pode ser resolvida pela construção de um triângulo retângulo e de um círculo, cujo raio é um dos lados do triângulo (cf. a figura 3 do Livro I; AT VI, p. 375). A raiz ou a linha procurada *z* (=OM) é a soma do raio do círculo com a hipotenusa do triângulo (isto é, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$), onde $\frac{1}{2}a$ é o raio (ON) do círculo e também um dos lados (LN) do triângulo e *b* é o outro lado (ML) do triângulo.

Essas são as etapas (somadas à demonstração) que compõem a estrutura básica

como diz Pappus, cujas proposições examinadas são do tipo: "se um objeto *x* é dado, então o objeto *y* pode também ser considerado como dado". Cf. Euclides (1966).

45 O tratamento algébrico permitirá que a figura perca, em parte, sua importância enquanto suporte do cálculo. Como diz Descartes, "não se tem amiúde necessidade de traçar essas linhas assim sobre o papel, sendo suficiente designá-las por algumas letras, cada linha por uma letra" (AT VI, p. 371).

do método de análise de Descartes. A "análise" recebe uma descrição detalhada de seu percurso, ao passo que a construção não fornece indícios de como foi elaborada, cuja razão parece ser a de que, restritos à geometria "comum" ou "ordinária" (AT VI, p. 374), os exemplos fornecidos priorizam o caráter inovador, de natureza algébrica, da primeira etapa. Entretanto, não há dúvidas sobre a função da construção como resolução: resolver um problema é construí-lo geometricamente. Elas evidenciam também o caráter mutuamente complementar da geometria cartesiana – entre a equação algébrica e a construção geométrica –, bem como a exigência de que sejam ambas, *sempre*, as mais elementares possíveis. Não apenas a equação deve ser a mais simples, mas, como dirá o Livro III,[46] a construção não pode ser nem mais complexa nem mais simples do que a mínima exigida.

Três observações finais a respeito do bloco I-B. A primeira delas diz respeito à ausência da terceira etapa do método, da demonstração, isto é, da prova de que a construção está correta e resolve a equação. Embora haja ocasiões em que a construção e a "análise" tampouco sejam fornecidas, a demonstração parece ser dispensável por não contribuir, em termos estritamente resolutivos, na *elaboração* da solução do problema, mas apenas na certificação de que ele fora adequadamente resolvido: tendo cabido à construção, apoiada na "análise", a solução do problema, a demonstração prova ter sido ela feita adequadamente, sem nada acrescentar na resolução propriamente dita; se ela não foi feita adequadamente pela "análise" e pela construção, a demonstração não certifica a construção e mostra sua inadequação, sem contribuir *positivamente* para uma nova solução. Assim, a demonstração não contribui diretamente na resolução de um problema – e Descartes está interessado em resolver problemas geométricos.[47] A segunda observação diz respeito à natureza algébrica da "análise", não apenas em contraposição ao caráter geométrico da construção, mas também em relação à geometria (sem notação algébrica) clássica. A introdução da álgebra altera substancialmente a natureza do problema, sua dinâmica teórica e operacional, de sorte que fazer geometria não pode ser mais à moda antiga. Basta apontar o advento de novos objetos, dentre os quais podemos destacar o objeto "curva-equação".[48] A terceira observação se refere à existência de procedimentos complementares ao método aqui proposto, alguns dos quais incidem diretamente

46 Essa é uma importante contribuição metodológica do Livro III (AT VI, p. 442).

47 A demonstração, além disso, parece ter pouco valor para o indivíduo que resolve o problema, sendo um "contrassenso" exigir de si próprio uma prova: a *performance* resolutiva carrega consigo sua legitimidade, sendo executado um passo apenas na condição de ser considerado legítimo, ainda que possa ocorrer ocasionalmente o engano. A *performance* resolutiva apoia-se na "clareza e distinção" com que é realizada, a "prova" estando subsumida na própria descoberta e apreensão da resolução. É uma constante do pensamento cartesiano em geral subsumir a prova à descoberta e à apreensão intuitivo-construtiva. Para um exemplo da etapa demonstrativa, cf. o problema de Pappus, parte II (AT VI, p. 404-5).

48 Cf. Giusti (2000), em especial o Cap. V e Nota 7, que trata da emergência de novos objetos, no caso de *A Geometria*, do objeto "curva-equação", algo que não é mais apenas uma curva, mas não é ainda uma equação.

nele e outros são mais abrangentes. Além do caso já citado relativo à regra de que uma curva não pode exceder nem em complexidade nem em simplicidade ao que exige o problema, podemos citar todas as novidades advindas da introdução das operações aritméticas na geometria e da notação algébrica, mas também as regras de manipulação e de redução das equações, sendo o Livro III fundamental nesse sentido.[49]

O terceiro bloco (I-C, quatro seções) do Livro I trata do famoso problema de Pappus. Descartes examina detalhadamente a sua primeira parte, relativa a casos em que o problema é plano, bem como traz comentários a respeito da segunda parte (examinada no Livro II). O problema mais extenso e mais importante de *A Geometria*, em meio ao qual ou a partir do qual aparecem os grandes temas do Livro II e alguns do Livro III,[50] é formulado nos termos dados a seguir. Sendo dadas em posição três, quatro ou um número maior de linhas retas, pede-se, primeiramente, para determinar um ponto a partir do qual se podem traçar outras tantas retas, as quais, formando cada uma um dado ângulo com cada uma das dadas, satisfazem a seguinte condição: se forem três as retas dadas, que o retângulo formado por duas das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o quadrado da terceira; se forem quatro as retas dadas, que o retângulo formado por duas das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o retângulo das duas restantes; se forem cinco retas dadas, que o paralelepípedo formado por três das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o paralelepípedo formado pelas duas restantes e uma outra linha dada; se forem seis retas, que o paralelepípedo formado por três das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o paralelepípedo formado pelas três restantes; se forem sete, que o produto[51] de quatro das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o produto formado pelas três restantes e uma outra linha dada; e, assim, ao infinito. Em um segundo momento, visto que há uma infinidade de pontos que podem satisfazer a condição exigida, pede-se para determinar a linha (isto é, o lugar geométrico) na qual todos eles se encontram.

Dividido em duas partes, na primeira trata-se de encontrar pontos e na segunda, lugares (um conjunto contínuo de pontos). Esse tratamento distinto, que produzirá duas classificações distintas de soluções, é decorrente da possibilidade de, atribuindo determinados valores a uma linha desconhecida (y, por exemplo), se poder encontrar valores correspondentes para a outra (x), o que é equivalente a uma equação de uma incógnita, ou, então, devendo-se encontrar

49 O início do Livro II também pode ser considerado sob a perspectiva metodológica, em especial a discussão sobre o que é uma curva geométrica e sua função resolutiva.

50 Descartes transcreve o problema (AT VI, p. 377-79), conforme Pappus o apresentou no Livro VII de sua obra (1982, p. 507-10), segundo a tradução latina de Commandino (Pappus, 1588, p. 164-5).

51 A introdução do termo “produto” evidencia a impossibilidade geométrica de apresentar um objeto com mais de três dimensões.

valores para ambas, a equação correspondente é de duas incógnitas (*x* e *y*) e a sua determinação dá origem a um lugar geométrico. Na primeira configuração, os pontos procurados se encontram: a) pela geometria simples, isto é, com régua e compasso, para três, quatro e cinco retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); b) pela geometria dos sólidos, isto é, por meio das seções cônicas, para cinco paralelas, seis, sete, oito e nove retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); c) por uma linha de um nível mais composta que as cônicas, para nove paralelas, 10, 11, 12 e 13 retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); d) por uma linha de um nível mais composta que a precedente, para 13 paralelas, 14, 15, 16 e 17 retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); e, assim, ao infinito. Na segunda configuração, os pontos procurados se encontram: a) em uma das seções cônicas (ou em uma reta ou em uma circunferência de um círculo, para casos "degenerados"), para três e quatro retas dadas; b) em uma linha de um nível mais composta que as cônicas[52] (ou em uma reta, em uma circunferência de um círculo ou em uma cônica, para casos "degenerados"), para cinco, seis, sete e oito retas dadas; c) em uma linha de um nível mais composta que as precedentes (ou em uma reta, em uma circunferência de um círculo, em uma cônica ou em uma curva de um nível mais complexa, para casos "degenerados"), para nove, 10, 11, 12 retas dadas; e, assim, ao infinito.

Descartes trata longamente do caso de quatro linhas retas. No Livro I, ele mostrará que os pontos que satisfazem a condição exigida podem ser encontrados, como dito acima, por meio da régua e do compasso (retas e círculos). É nesta ocasião que o autor utiliza pela primeira vez duas linhas (*x* e *y*, aqui não ortogonais) "como as principais" e às quais pretende "relacionar todas as outras" (AT VI, p. 383) com o objetivo de impor uma ordem ao exame da configuração; a partir desse uso é que surgiu o que conhecemos como "coordenadas cartesianas". Seguem abaixo os passos centrais do problema com quatro retas dadas (segundo uma determinada configuração geométrica e respectiva combinação de sinais), problema que serve também como exemplo metodológico a ser explorado.[53]

52 A mais simples depois das cônicas é uma curva gerada pela interseção de uma parábola com uma reta, chamada parábola cartesiana ou concoide parabólica ou cúbica (dentre outros nomes).

53 Havendo extensa bibliografia sobre o "problema de Pappus", nos restringimos aqui a uma exposição sucinta.

PROBLEMA DE PAPPUS (parte 1)

ENUNCIAÇÃO: Dadas em posição as retas *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, encontrar um ponto *C*, a partir de outras quatro retas desconhecidas, como *CB*, *CD*, *CF*, *CH*, que formam ângulos dados com as primeiras, de tal forma que *CB.CF=k.CD.CH*, com *k=1*.

1) "ANÁLISE":

1.1) Suposição de que o problema esteja resolvido, estando dados todos os elementos necessários à sua resolução.[54]

1.2) Atribuição de nomes às linhas, considerando duas como as principais (*AB*= *x*; *CB*= *y*).

1.3) Prolongadas todas as linhas, conhecidas e desconhecidas, o exame de cada triângulo formado dá origem às equações, uma para cada linha desconhecida: CB=*y*; CD=$\frac{czy+bcx}{z^2}$; CF=$\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$; CH= $\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$.[55]

1.4) Redução de todas as equações a uma única: $y^2 = \frac{(cfglz-dekz^2)y-(dez^2+cfgz-bcgz)xy+bcfglx-bcfgx^2}{ez^3-cgz^2}$.

Fazendo *y=1*, temos: $bcfgx^2 = (bcfgl + bcgz - cfgz - dez^2)x + (cfglz + cgz^2 - dekz^2 - ez^3)$, uma equação da forma $x^2 = \pm ax \pm b^2$.

2) CONSTRUÇÃO: Descartes não a fornece, pois a equação é de segundo grau, com uma incógnita, do tipo resolvido anteriormente por meio de régua e compasso.

LIVRO II

O Livro II, conforme enuncia o título, trata da natureza das linhas curvas, e interpõe-se entre os outros dois consagrados à resolução de problemas, primeiramente planos (Livro I) e, depois, os sólidos e mais do que sólidos (Livro III). Tendo em conta os ingredientes trazidos pelo Livro I e os objetivos da obra, o Livro II reconhece a necessidade de introduzir objetos ainda não examinados, para o tratamento dos problemas subsequentes: até então restrita ao uso da reta e do círculo, *A Geometria* precisa de novas linhas – pois se trata sempre de linhas –, para que seja possível a resolução dos problemas superiores. A investigação engloba vários aspectos relativos ao *objeto* curva (tais como a definição das curvas geométricas por oposição às mecânicas, sua classificação, suas diferentes formas de traçamento, sua fundamental relação com a equação correspondente, suas propriedades, etc.);

54 Como em outros lugares, Descartes começa com a frase canônica da "análise": "Primeiramente, eu suponho a coisa como já feita" (AT VI, 382, 18-19).

55 Note que z não é um termo desconhecido, mas indeterminado, que serve de termo comum em todas as razões dadas.

contudo, as curvas não são, para Descartes (e, em geral, para os gregos), vistas prioritariamente como objetos em si mesmos, mas como *meios* para o tratamento de problemas, como *objetos-solução*. As entidades básicas e orientadoras da constituição da ciência geométrica, como já dito, são problemas e não objetos, sendo as curvas seus principais meios resolutivos.[56]

Uma das características fundamentais do Livro II é a forte articulação e imbricação entre construção geométrica e equações algébricas. Descartes reconhece a equiparação de domínio entre curvas e equações, proposição sintetizada na seguinte afirmação: todos os pontos de uma curva têm necessariamente uma única e mesma relação, *condensada em sua equação*, com todos os pontos de uma linha reta; e, assim, ele faz coincidir o critério geométrico do traçamento por movimento com o algébrico: toda curva tem sua equação algébrica e toda equação algébrica é equação de uma curva. Contudo, parece que não podemos chegar a afirmar a identidade entre curva e equação: elas não se substituem, não podendo o tratamento algébrico eliminar a construção geométrica, embora sejam (ou virão a ser) "a mesma coisa" sob perspectivas distintas, algo já pontuado pelas duas etapas do método. Esse paralelismo ou quase identidade – ponto nevrálgico da obra – permite que detectemos as duas grandes forças constituintes do Livro II, uma eminentemente geométrica e a outra algébrica, mas também que confessemos a dificuldade de ajustá-las mutuamente ou de equilibrá-las.

O Livro II, o maior dentre eles, contém 20 seções, divididas em seis blocos.

O primeiro deles (II-A, duas seções) trata basicamente da distinção entre curvas geométricas e mecânicas, da classificação das primeiras em gêneros e de sua geração pelos compassos inventados pelo autor. Ele fornece também um critério de delimitação das fronteiras da geometria – ciência que trata do que é "preciso e exato" (AT VI, p. 389) –, bem como a distinção entre simplicidade (complexidade) de uma curva e a sua forma de geração simples (complexa).

Descartes começa por recuperar a divisão pappusiana dos problemas geométricos em problemas planos, sólidos e lineares, caracterizados cada qual pelos meios utilizados em sua construção, e discute as razões pelas quais as curvas mais complexas foram consideradas mecânicas pelos gregos. Embora, pelo que tudo indica, os antigos não tenham simplesmente excluído da geometria as curvas mais complexas, a ocasião é propícia para Descartes introduzir a sua definição de curva geométrica: tendo em conta a definição de geometria fornecida acima, uma curva é considerada geométrica, seja ela simples ou complexa, pouco importa, desde que gerada por um movimento único ou por vários redutíveis a um apenas, de modo que dela se possa ter "um conhecimento exato de sua medida" (AT VI, p. 390). Dentre as curvas estudadas, algumas são novas, como a dita "parábola cartesiana" e as ovais, e outras bem conhecidas, dentre as quais se destacam duas mecânicas,

56 A exploração das *curvas-meio* nos leva à exploração das *curvas-objeto* e das propriedades definidoras das curvas.

a espiral e a quadratriz, e duas geométricas, a concoide e a cissoide, todas estas tomada indistintamente como instrumentais (mecânicas) pelos antigos.

Em seguida, o autor introduz seu famoso compasso de esquadros deslizantes ou *mesolabum*, por meio do qual, tendo por base a teoria das proporções, é possível traçar uma infinidade de curvas, cada vez mais complexas, geradas por vários movimentos todos eles reconduzidos ao movimento único de abertura do compasso. Sendo geométricas todas as curvas construídas desse modo, curvas superiores às cônicas não devem ser consideradas mecânicas em função de sua complexidade. E, assim, a noção de aceitabilidade de uma curva se separa completamente da de composição ou de complexidade; e, portanto, se simplicidade e composição são fundamentais em outros aspectos, elas não operam aqui como critérios de aceitação de um objeto geométrico: toda curva, por mais composta que seja, é geométrica, desde que gerada por um movimento[57] contínua e inteiramente determinado e redutível a um só.[58] Duas observações importantes se seguem disso. A primeira diz respeito à existência de um conjunto infinitamente grande de curvas, construídas seja por esse seja por outros instrumentos, todas elas geométricas, desde que obedecidas as considerações estabelecidas acima. A segunda se refere ao fato de que curvas geradas subsequentemente não são, necessariamente, em termos de simplicidade, *imediatamente* subsequentes, havendo outras de complexidade intermediária entre elas; e, assim, elas não se encontram tampouco rigorosamente ordenadas.[59] Este é o caso das curvas construídas pelo *mesolabum*, cujas equações correspondentes evidenciam que elas não crescem progressivamente. Com efeito, a equação da curva AD (fig. 1, L. II) é $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$, e as equações das curvas AF e AH são $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$ e $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)$, respectivamente de graus quatro, oito e doze.

57 Por outro lado, por mais complexa que seja uma curva geométrica, sua geração se dá por um "movimento simples", isto é, por movimentos redutíveis a um só; e, assim, a complexidade da curva é reconduzida à "simplicidade" do movimento responsável por sua geração.

58 Aparece aqui uma questão fundamental, já discutida mais acima, relativa à prioridade entre ordem e medida. Muitos intérpretes dão prioridade à ordem (estendendo-a a outras áreas), com o argumento de que, por mais complexos que sejam determinados objetos, sua "composição deve depender de uma ordem rigorosa, vetor de exatidão", por meio da qual emergiria como que uma "cadeia dedutiva" que nos conduziria cada vez mais longe (Jullien, 1996, p. 88). Ora, Descartes não menciona a ordem, *mas a medida*, como elemento definidor da geometria e construtor da exatidão, uma curva complexa sendo exata (isto é, geométrica) não em função de seu *ordenamento*, mas em razão da mensurabilidade das relações envolvidas no processo de geração. A ordem é muito mais resultado da investigação do que elemento que a impulsiona, sendo constituído definitivamente pelo sequenciamento das equações. Finalmente, tendo *A Geometria* como uma de suas bases a teoria das proporções (cf. Vuillemin, 1960, p. 112-ss), parece "natural" atribuir à medida um papel preponderante: as noções de *razão* e de *proporção* se reportam à medida, e a antiga teoria das proporções (Livro V dos Elementos) não por acaso tinha por principal objetivo (dificuldade) resolver o problema da incomensurabilidade. Cf. as definições 3, 4 e 6 do Livro V dos *Elementos*.

59 Logo, o critério de ordenamento das curvas não é simplesmente o seu sequenciamento construtivo.

Esse segundo ponto poderia dar a impressão de conter uma consequência inesperada nos resultados indicados pelo compasso; entretanto, o *mesolabum* não foi pensado com a função de ordenar curvas, mas de ilustrar a geração, contínua, tanto de uma curva quanto da multiplicidade delas. O ordenamento das curvas será concebido a partir de outro instrumento, que permite, desta vez sim, em razão do uso de cada uma delas como meio, a construção progressiva (subsequente) entre elas; não será, contudo, essa subsequência ela mesma que fornecerá o critério de classificação das curvas, mas um correspondente algébrico.[60] Assim, o compasso gera as curvas subsequentemente, e as respetivas equações determinam seu ordenamento em função do seu grau (da sua dimensão, nas palavras de Descartes), mas aos pares (cada par constituindo um gênero), cuja razão, dirá Descartes (AT VI, p. 395-6), é que sempre é possível reduzir uma equação quártica a uma cúbica, uma de grau seis a uma de quinto e, assim, sucessivamente. A classificação é a seguinte: 1º. gênero: curvas com equação de dimensão dois (círculo, parábola, hipérbole e elipse)[61]; 2º. gênero: curvas com equação de dimensão três e quatro (por ex., parábola cartesiana, cissoide de Díocles, concoide de Nicomedes); 3º. gênero: curvas com equação de dimensão cinco e seis; e assim por diante.

O compasso utilizado por Descartes consiste na articulação entre um plano deslizante sobre um eixo e uma régua pivotante ao redor de um ponto fixo, de modo que a intersecção entre a régua e um lado (prolongado) do plano produzirá uma curva que será, sempre, de um gênero imediatamente subsequente ao gênero da equação representante do lado do plano utilizado. Se o lado do plano for uma reta, a curva construída é uma cônica (equação de dimensão dois, primeiro gênero); se o substituirmos por uma cônica, a curva resultante é de um gênero subsequente (equação de dimensão três ou quatro, segundo gênero); e assim sucessivamente.[62] Embora de natureza algébrica, essa classificação é emergente de construções geométricas; e, com isso, é possível reconhecer a equivalência entre construtibilidade geométrica e equacionamento algébrico.[63]

Além dessa equivalência estabelecida entre construção geométrica e procedimentos algébricos (sem assimilação completa), o instrumento utilizado permite a Descartes afirmar uma das suas teses mais centrais de sua obra, qual seja: todos os pontos de uma curva geométrica têm necessariamente uma mesma relação com todos os pontos de uma reta, expressa pela equação correspondente.[64] Uma curva

60 Definitivamente, critérios geométricos permitem fixar os limites da disciplina e decidir se um objeto é ou não geométrico, mas não permitem ordená-lo. Se critérios algébricos definem a ordem, critérios geométricos determinam a medida.

61 Descartes, embora não tenha feito, poderia ter incluído aqui a reta, como uma curva de primeiro grau.

62 Trata-se aqui do que chamou de “transformação de Descartes”.

63 E. Giusti (2000) propõe uma tese mais forte do que a da equivalência, a da emergência ou formação de um novo objeto, a curva-equação.

64 Essa afirmação contém, como diz Smith, o núcleo central do que virá a se constituir como

geométrica estabelece uma relação de regularidade e continuidade, indistintamente em cada um de seus pontos (portanto, em todos), para com todos os pontos de uma reta de referência, ao contrário das mecânicas, cujos pontos são determinados por alguma medida arbitrária e não contemplam o que é requerido para compô-la (AT VI, p. 411). A equação é montada a partir dessa relação e, portanto, a condensa e é sua expressão. Mais adiante, Descartes afirmará que, a partir disso, é possível estabelecer outras relações entre os pontos da curva com outros pontos e outras retas e, então, conhecer outras de suas propriedades (AT VI, p. 412-3).

O segundo bloco (II-B, cinco seções) retoma o problema de Pappus. Uma vez classificadas as curvas em gêneros a partir do estudo das dimensões das equações e tendo associado, no final do Livro I, uma equação para cada problema de Pappus, Descartes poderá agora associar a cada problema um gênero de curva. A lista é como segue: a) para o caso de no máximo quatro retas dadas, a equação será no máximo de segundo grau, e as curvas-solução do primeiro gênero; b) para o caso de no máximo oito retas, a equação será no máximo de quarto grau, e as curvas-solução do segundo gênero; c) para o caso de no máximo 12 retas, a equação será no máximo de sexta dimensão, e as curvas-solução do terceiro gênero; e, assim, com os demais casos. Além disso, como um problema pode ter "infinitas" configurações (em razão da variação das posições das retas, dos valores das quantidades conhecidas e dos seus sinais), Descartes conclui que todas as curvas do primeiro gênero, do segundo, do terceiro, etc. – e, portanto, todas as curvas geométricas – servem, cada qual dentro do seu gênero, como solução a uma configuração do problema de Pappus. E, assim, Descartes afirma que toda curva que seja geométrica e sobre a qual possa recair o cálculo (AT VI, p. 397) é "pappusiana".[65] Com isso, fica evidente o papel central do problema: ele operacionaliza um critério geométrico de classificação, de ordenamento e de distinção das curvas, ao mesmo tempo em que mostra o grande número de curvas existentes, todas elas associadas a equações agrupadas em gêneros, mas também lugares-solução de uma configuração do problema.

Isso posto, ele passa a examinar o caso de quatro linhas (e, mais adiante, o caso mais simples de 5 linhas). A parte II do problema, diferente da anterior, tendo por objetivo determinar o lugar geométrico (e não apenas um ponto) que satisfaz a condição do problema, não pode atribuir aleatoriamente valores para *y* a fim de determinar os de *x*, mas, ao contrário, precisa determinar tanto *x* quanto *y*. Assim, para o caso de quatro linhas acima apresentado (AT VI, p. 397-406), permanece a equação anterior à eliminação de *y*, uma equação de segundo grau com duas incógnitas. Depois disso, Descartes abrevia sucessivamente os termos (formados por quantidades todas elas conhecidas) até determinar a equação para *y* (= BC). Resultando $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$, ele passa à etapa construtiva,

"geometria analítica".

65 Afirmando ser "impossível de imaginar alguma delas que não seja útil a esta questão" (AT VI, p. 381), Descartes comete um erro que será criticado por Newton.

isto é, à determinação geométrica da equação: a linha BC (=*y*) é construída por várias operações envolvendo os três componentes da equação: *y* é igual à linha *m* diminuída da linha $-\frac{n}{z}x$ e somada à linha $\sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$; isto é *BC=BK-KL+LC*. A construção de LC é a parte mais complexa, e Descartes expõe longamente os diferentes casos, conforme o quadro abaixo. Ele termina fornecendo a prova de um deles.

PROBLEMA DE PAPPUS (parte 2)

ENUNCIAÇÃO DO PROBLEMA:

1) "ANÁLISE":

1.1) ...

1.2) ...

1.3) ...

1.4) Redução das equações a uma só:

$$y^2 = \frac{-dekz^2y + cfglzy - dez^2xy - cfgzxy + bcgzxy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

Por sucessivas abreviações, a equação se transforma em:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}.$$

2) CONSTRUÇÃO:[66]

i) Descartes divida a equação em três partes: $y=m$ menos nx/z mais $\sqrt{(m^2+ox-px^2/m)}$, ou seja, $CB=BK-KL+LC$.

ii) BK é conhecido, e KL é construído em função de x, pois n/z varia em função de x.

iii) A construção de $LC=\sqrt{(m^2+ox-px^2/m)}$ é mais complexa:

- Se $m^2+ox-px^2/m=0$ ($LC=0$), C se encontra na reta IL e $y=m-nx/z$.
- Se houver $+px^2/m$ e $o^2=4pm$, C está em outra linha reta. O mesmo ocorre se m^2 e ox ou ox e px^2/m forem nulos.
- Se $px^2/m=0$ e, portanto, $LC=\sqrt{(m^2+ox)}$, C representa uma parábola.
- Se tivermos $+px^2/m$, C representa uma hipérbole. Se $a^2m=pz^2$, a hipérbole é equilátera.
- Se tivermos $-px^2/m$, C representa uma elipse. E se $a^2m=pz^2$ e o ângulo ILC for reto, C representa um círculo.

3.2) Demonstração: Segue a prova de algumas situações (caso 5).

A conclusão de Descartes é a de que o lugar geométrico que satisfaz as condições do problema pode ser tanto uma linha reta ou um círculo (lugar plano) quanto uma das três seções cônicas (lugar sólido). E, com isso, encontra-se

66 Essa exposição organizada dos casos possíveis encontra-se detalhada em Scott (1976, p. 108).

determinado tudo o que pertence à “composição dos lugares sólidos” e dos “lugares planos” neles incluídos (AT VI, p. 406-7). Em síntese, a discussão dos diferentes casos permitiu mostrar quando se obteve uma cônica, um círculo ou uma reta, estando o problema para quatro linhas interinamente resolvido pelas curvas do primeiro gênero (de grau até dois).[67]

Em seguida, Descartes examina o “problema dos antigos” para cinco retas dadas, das quais quatro são paralelas e uma perpendicular, sendo as cinco desconhecidas também perpendiculares às cinco dadas. Problema mais simples depois do caso com cinco retas todas paralelas,[68] ele tem como resultante a equação examinada mais acima pelo segundo compasso, a chamada parábola cartesiana (ou concoide cúbica ou parabólica). Gerada com o auxílio de uma parábola simples (de grau ou dimensão dois), à parábola cartesiana corresponde uma equação de terceiro grau (segundo gênero), qual seja: $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$.

E, assim, feita a classificação das equações (curvas) em gêneros e estando cada configuração do problema de Pappus associada a uma equação, encontra-se estabelecida a correspondência entre o gênero das equações e cada tipo de configuração do problema. Descartes não afirma explicitamente que toda equação algébrica exprime uma curva geométrica, embora seja esta, no fundo, como afirma Jullien (1996, p. 96), uma tese cartesiana. De todo modo, o problema de Pappus mostra-se como correspondente geométrico da classificação algébrica das curvas; e, desse conjunto de considerações, fica estabelecida a coincidência dos critérios de aceitabilidade das curvas, aquele por composição de movimentos regulares e contínuos e aquele por montagem de uma equação algébrica.

O terceiro bloco (II-C, duas seções), bastante curto, serve como fechamento de alguns pontos tratados anteriormente, ao mesmo tempo em que apresenta um novo critério de aceitabilidade das curvas geométricas, sua construção por meio de cordas ou de um fio, utilizada em *A Dióptrica* para explicar a elipse e a hipérbole a exemplo da prática dos jardineiros. O argumento de Descartes é que, desde que se utilize cordas absolutamente distendidas para traçar curvas (uma oval, por exemplo – AT VI, p. 427-8), pelas quais é possível determinar exatamente o tamanho das retas utilizadas, não se pode rejeitá-las, contrariamente às cordas utilizadas tanto como retas quanto como curvas, as quais não permitem que a partir delas se conclua algo de “exato e seguro”, visto que “a proporção que existe entre as retas e

67 Casos com cinco linhas são também examinados por Descartes (AT VI, p. 407-11). Um dos resultados da investigação cartesiana é a classificação das curvas, soluções do problema de Pappus generalizado para ***n*** linhas, em gêneros, e o estabelecimento de sua relação com o grau da equação correspondente. Assim, problemas de três e quatro linhas dadas originam equações de segundo grau e pertencem ao primeiro gênero; problemas de cinco a oito linhas dadas originam equações de terceiro e quarto graus e pertencem ao segundo gênero; problemas de nove a doze linhas dadas originam equações de quinto e sexto graus e pertencem ao terceiro gênero; e assim por diante. Cf., por exemplo, o quadro apresentado por Vuillemin (1960, p. 109).

68 O caso com cinco linhas paralelas é também mencionado, tendo como solução uma linha reta.

as curvas" jamais poderá, crê Descartes, "ser conhecida pelos homens" (AT VI, p. 412). Descartes, antes disso, observa que há uma diferença capital entre encontrar pontos de uma curva geométrica e encontrar pontos de uma curva mecânica. Enquanto no segundo caso não é possível encontrarmos indiferentemente qualquer ponto da curva – visto que aqueles que encontramos são possíveis em razão de alguns parâmetros ou medidas determinadas antecipadamente, de modo que eles, efetivamente, não são pontos da curva, isto é, não são pontos "que lhe são de tal modo apropriados que não possam ser encontrados senão por ela" (AT VI, p. 411) – no primeiro caso, ao contrário, pode-se encontrar qualquer um indistintamente, todos eles sendo igualmente indicadores do que ela é e reveladores da singular relação que ela tem, por meio de cada um deles, com os pontos de uma reta a ela associada. Assim, um ponto de uma curva mecânica não é um ponto dessa curva, não expressa a "natureza" dessa curva, mas, no máximo, revela a coincidência de um de seus pontos com um ponto encontrado por outros meios, ao passo que um ponto de uma geométrica revela o que ela é e condensa nele todos os seus "segredos" (relações). A construção por pontos, entretanto, não tem a indeterminação e a generalidade desejadas. Seus limites operatórios e teóricos, contudo, não comprometem sua legitimidade; e, com isso, Descartes equipara esse critério àquele que consiste em traçar uma curva por meio de um movimento regular e contínuo. Portanto, Descartes tem três critérios distintos para caracterizar o conjunto das curvas geométricas: a construção por pontos, a construção por movimento regular e contínuo, a equação algébrica correspondente. E, embora correto, esse resultado será provado somente quase dois séculos e meio depois.[69]

O quarto bloco (II-D, cinco seções) trata de um dos temas cujo significado tem sido considerado um dos mais polêmicos pelos intérpretes. Trata-se do método para traçar a normal em qualquer ponto de uma curva (sendo a normal a linha perpendicular à tangente nesse ponto), e o núcleo do debate se dá em razão de sua natureza exclusivamente algébrica. O estudo sobre as curvas e suas propriedades aí realizado, por um lado, não se enquadra facilmente numa perspectiva construtivista da obra, e por isso ele é avaliado por defensores dessa visão como uma digressão ou um excurso. Por outro lado, dentro de uma visão algebrista, dada a sua fecundidade e generalidade, esse método pode ser visto como a expressão do que é essencial no conhecimento das curvas, sua expressão algébrica, isto é, um meio de explicitação do "conteúdo" de uma curva condensado em sua equação. O debate é conduzido ao limite pelas próprias palavras de Descartes quando diz que "esse é o problema mais útil e mais geral, não somente do qual tenho conhecimento, mas também aquele que sempre desejei conhecer na geometria" (AT VI, p. 413).

69 Ele será demonstrado, como assinala Warusfel (2009, p. 770; 2010, p. 166; p. 545, n. 14), em 1876, por Alfred Kempe. Um quarto critério, mencionado mais acima, aquele que faz de todo problema de Pappus ter como solução uma curva geométrica, é, ao contrário, inexato.

Um primeiro item importante a ser pontuado é que o tema aparece no contexto da tese geral, apresentada mais acima, que diz respeito à existência de uma relação, única e constante, expressa em uma equação, entre todos os pontos de uma curva com todos os pontos de uma linha reta de referência. Essa tese será aqui ampliada, na medida em que é reconhecida a existência de outras relações da curva e de seus pontos com outras retas e pontos, as quais revelam suas propriedades, parâmetros e singularidades. Dentre essas relações a principal é a que expressa a normal (e a tangente) de um ponto da curva, visto que todas as outras propriedades de uma curva não dependem senão do ângulo que ela faz com determinadas retas (sendo a normal a mais simples).[70] Disso se conclui que esse procedimento permite determinar "tudo o que é requerido para os elementos das linhas curvas" (AT VI, p. 413), tudo o que se pode conhecer a respeito de uma curva.

Assim, o estudo da normal (e das suas "contingentes", como diz Descartes) encontra-se integrado ao estudo das curvas e ao estabelecimento da tese supramencionada. E, embora, como salienta Warusfel (2009, p. 727-8), tudo o que se pode conhecer a respeito de uma curva encontra-se condensado e codificado na equação, propriedades como a normal são determinações de uma curva já conhecida e já construída, de sorte que, por mais fundamental que seja a álgebra, como diz Jullien (1996, p. 103), ela não define seu objeto, o pano de fundo permanecendo, portanto, de natureza geométrica. Descartes, nos exemplos fornecidos, pressupõe a curva já construída (como revela a famosa frase do início da "análise": "suponho a coisa já feita" (AT VI, p. 413)), ponto de partida para que se explicitem as propriedades expressas algebricamente. Por outro lado, em contraposição a esses elementos favoráveis à interpretação construtivista, é preciso reconhecer que todas essas propriedades das curvas que a tornam exaustivamente conhecidas são trazidas em sua generalidade pela dinâmica algébrica, o que evidencia o alcance geral e abrangente do seu tratamento. E, assim, parece que não podemos separar o ponto de vista construtivo-geométrico e os desdobramentos algébricos, ambos integrantes do ambiente resolutivo proposto pela obra em sua totalidade.

Em seguida, Descartes expõe seu método geral de cálculo das normais (e, por extensão, das tangentes) às curvas geométricas. Sendo a procura da reta normal de um ponto de uma curva geometricamente equivalente à determinação da tangente desse ponto (por serem perpendiculares), Descartes determina a normal como raio de um círculo tangente, e o problema é reconduzido à determinação deste último. Havendo uma infinidade de círculos tangentes, mas apenas uma normal, ele será tomado a partir de seu centro sobre a ordenada ou reta de referência. Uma vez determinada a equação do círculo e da curva, o sistema das duas equações

70 Fazendo uso de um vocabulário que Descartes emprega em sua filosofia, Vuillemin afirma que a normal de uma curva é o "atributo essencial" dessa curva, sendo os demais atributos secundários.

permite eliminar uma das incógnitas, obter a equação da outra e determinar a normal. Se o raio do círculo determinar a normal, o círculo tocará a curva em um ponto; estando, porém, ligeiramente deslocado sobre o eixo de referência, o círculo cortará a curva em dois pontos, e a equação terá duas raízes distintas, ao passo que, reduzindo esse deslocamento, ter-se-á finalmente duas raízes iguais (uma raiz dupla).

É a primeira vez que um procedimento geral para a determinação das tangentes vem a público, ainda que outras técnicas com esta finalidade fossem conhecidas na mesma época, dentre as quais se encontram a de Fermat, que se tornará predominante. Descartes trata do caso da elipse, da parábola cartesiana e de uma oval, que também levará seu nome. Ele caracteriza também, mais adiante, a determinação da normal da concoide de Nicodemos, curva de quarto grau, por meio de uma simples construção geométrica. Antes disso, porém, Descartes se refere ao procedimento dos coeficientes indeterminados, à "invenção de supor duas equações de mesma forma para comparar separadamente todos os termos de uma aos termos da outra e, assim, fazer nascer muitas equações de uma única" (AT VI, p. 423), cuja fecundidade fez Descartes afirmar não estar ela entre as menores invenções das quais se serviu.

O quinto bloco (II-E, cinco seções) do Livro II trata de quatro espécies de ovais, das suas formas e propriedades, e as relaciona com *A Dióptrica*. Uma de suas características marcantes é o tratamento predominantemente geométrico que recebem, contrariamente ao tratamento algébrico dado à teoria das normais. Essa família de curvas, portanto, será conhecida por construção, e por construção sem uso dos instrumentos ou compassos apresentados anteriormente, mas por pontos. Além disso, não serão fornecidas suas equações, mas seus elementos característicos e suas propriedades ópticas, embora haja cálculos algébricos e a primeira das ovais já tenha sido introduzida pelo estudo das normais e pelo método de identificação dos coeficientes. Conforme apresenta Rabuel, o objetivo de Descartes, nestas seções, é o de explicar "a natureza e os efeitos de quatro gêneros de ovais" e o de apresentar "a figura que é preciso dar às lentes, a fim de que reúnem em um ponto dado os raios que veem de um outro ponto". E, assim, segundo Rabuel, são cinco os pontos explorados por Descartes:

> 1) A reflexão e a refração da luz em poucas palavras; 2) a descrição dos quatro tipos de ovais; 3) suas propriedades em relação à reflexão e à refração da luz, e a demonstração dessas propriedades; 4) quais propriedades o círculo, a parábola, a elipse e a hipérbole têm em relação à reflexão e à refração da luz; 5) a figura que é preciso dar às lentes, a fim de que reúnam em um ponto dado os raios que vêm de um outro ponto dado (Rabuel, 1730, p. 337).[71]

71 O volumoso texto dos *Comentários* de Rabuel (de 1730), muito citado pelos especialistas, é um excelente livro para o estudo de *A Geometria* em sua totalidade.

O sexto e último bloco (II-F, uma seção) é, na verdade, uma observação, a única na obra, sobre a geometria espacial e sobre a aplicação de seus estudos a curvas descritas em um espaço tridimensional, de sorte que Descartes pensa "não ter omitido nada dos elementos que são necessários para o conhecimento das linhas curvas" (AT VI, p. 441).

Antes de apresentar o Livro III, oferecemos abaixo uma tabela alternativa e complementar de leitura de *A Geometria*. O objetivo é propiciar formas de compreensão que deem conta da multiplicidade de elementos que ela traz, tendo em conta que sua riqueza não parece poder se esgotar apenas através deu um viés interpretativo. A tabela é apresentada com uma linguagem modernizada e é retirada de Warusfel (2010, p. 535-7): ela traz elementos de uma interpretação da obra como um tratado voltado a resolver todas as equações algébricas, por meio de instrumentos geométricos novos e, com isso, tendo a pretensão de resolver "o enigma imposto pela impossibilidade de ultrapassar o trabalho de Cardano e Ferrari, bloqueados no quarto grau" (Warusfel (2010, p. 534)). Ela é inserida aqui em razão de ser a parte final do Livro II uma das que menos se encaixam na interpretação geométrica apresentada e também em razão de o Livro III ser, em grande medida, um livro que trata da teoria das equações. O Livro III, contudo, será apresentado conforme o quadro anterior, seguindo o modelo da apresentação dos Livros I e II.

Plano de *A Geometria* (AT VI, p. 367-485) – em linguagem atual (Warusfel, 2010, p. 535-7)			
Livros	**AT VI**	**Seções**	**Conteúdo**
I	**369-387**	**9**	**I - Resoluções gráficas das equações de grau no máximo dois**
I-A	*369-376*	*1-5*	*A - Equações de grau um e dois*
A 1	369-371	1-2	1. Algoritmos gráficos para o grau um
A 2	371-374	3	2. Escrita simbólica das equações
A 3	374-376	4-5	3. Algoritmos gráficos para o grau dois
I-B	*377-387*	*6-9*	*B - Pappus I e o nascimento da geometria analítica* [72]
B 4	377-380	6	4. Construir e/ou reconhecer uma curva de Pappus
B 5	380-387	7-9	5. Construir Pappus II graças **à**s equações algébricas
II	**388-441**	**20**	**II - Curvas geométricas: equações e normais**
II-C	*388-413*	*1-10*	*C - Gerações de curvas e equações algébricas*
C 6	388-393	1-2	6. Curvas geométricas e curvas mecânicas
C 7	393-396	2	7. Parábola cartesiana e transformação de Descartes
C 8	396-407	3-6	8. Reconhecer Pappus II (três ou quatro linhas)
C 9	407-411	7	9. Parábola cartesiana e Pappus I para cinco linhas
C 10	411-413	8-10	10. Construções/descrições algébricas de curvas
II-D	*413-424*	*11-14*	*D - Raízes múltiplas e normais*

72 Pappus I e Pappus II tratam do problema de Pappus, o primeiro em seu sentido geral, e o segundo concernente a três ou quatro linhas. Pappus III se refere ao outro problema extraído da Coleção e tratado por Descartes no Livro III.

D 11	413-414	11	11. Intersecções de um círculo e de uma curva
D 12	414-417	11-13	12. Exemplos: elipse, parábola e oval cartesiana
D 13	417-419	13	13. Raízes "inteiramente iguais" e normais
D 14	419-424	13-14	14. Exemplos (*idem* e mais a concoide)
II-E	*424-440*	*15-19*	*E - Ovais cartesianas e dióptrica*
E 15	424-431	15-16	15. Descrições e gêneros, aplicações ópticas
E 16	431-440	17-19	16. Prova sintética do astigmatismo ovalar
II-F	*440-441*	*20*	*F - Normais no espaço*
F 17	440-441	20	17. Projetar sobre dois planos perpendiculares
III	**442-485**	**32**	**III - Resoluções gráficas das equações de grau no mínimo três**
III-G	*442-444-*	*1-2*	*G - Resolução gráfica de um problema algébrico*
G 18	442-444	1-2	18. Inserção de médias graças às curvas
III-H	*444-463*	*3-23*	*H - Poder das transformações algébricas*
H 19	444-446	3-8	19. Raízes de equações algébricas: número e gênero
H 20	446-454	9-18	20. Transformações de equações algébricas
H 21	454-457	19-21	21. Tratamento algébrico de equações de grau três
H 22	457-461	22	22. Tratamento algébrico de equações de grau quatro
H 23	461-463	23	23. Pappus III: solução algébrica e geométrica
III-I	*463-476*	*24-30*	*I - Equações de grau três ou quatro*
I 24	463-467	24-25	24. Algoritmos gráficos para os graus três ou quatro
I 25	467-469	25	25. Prova sintética desses algoritmos
I 26	469-471	26-27	26. Exemplos fundamentais: médias, trissecções
I 27	471-476	28-30	27. Comparação com uma resolução algébrica de Cardano
III-J	*476-485*	*31-32*	*J - Equações de grau cinco ou seis*
J 28	476-479	31	28. Algoritmos gráficos para os graus cinco ou seis
J 29	479-480	31	29. Construção alternativa da parábola cartesiana
J 30	480-483	31	30. Prova sintética desses algoritmos
J 31	483-484	32	31. Exemplos fundamentais: médias, polígonos regulares
J 32	484-485	32	32. Anúncio de uma extensão para todo grau

LIVRO III

O Livro III tem como tema central, conforme revela seu título, a construção dos problemas sólidos e superiores aos sólidos. De acordo com o primeiro quadro, fornecido mais acima, ele pode ser dividido em cinco partes. O bloco III-A, bastante curto, mas com um impacto altamente significativo, trata dos critérios que determinam a escolha adequada das curvas geométricas a serem utilizadas na construção dos problemas. Os blocos III-B e III-C, com características exclusivamente algébricas (com exceção de um caso geométrico examinado), são devotados ao estudo das equações e à sua redução à sua forma mais simples. Os outros dois blocos, III-D e III-E, se voltam exatamente ao objetivo maior do Livro III, à resolução dos problemas que ainda permanecem em aberto na obra, quais sejam, os problemas superiores aos planos ou cujas equações vão além das equações de segundo grau.

Uma das características marcantes do Livro III são as idas e vindas entre álgebra e geometria, algo que, à primeira vista, poderia parecer paradoxal ou mesmo evidenciar uma oscilação entre domínios de investigação distintos. Na verdade, a integração entre álgebra e geometria, já estabelecida nos livros anteriores (e encarnada nas duas etapas do método), é cada vez mais essencial na medida em que os problemas se tornem mais complexos: embora os problemas sejam e se mantenham de natureza geométrica, o tratamento algébrico permite que eles sejam conduzidos ao seu lugar e à sua maior simplicidade, possibilita soluções-padrão e com pretensão de universalidade e oferece um critério de ordenamento das diferentes entidades envolvidas.

O primeiro bloco (III-A) determina os critérios relativos às curvas a serem utilizadas na resolução dos problemas. Embora todas as curvas descritas por um movimento regular e contínuo sejam geométricas, disso não se segue que se possa utilizar indiferentemente qualquer uma delas para resolver um problema. Ao contrário disso, devemos sempre escolher a mais simples dentre todas; e, por simples, não se deve entender necessariamente as mais fáceis de serem descritas ou aquelas que tornam a construção e a demonstração mais fácil, mas aquelas que são do gênero mais simples possível. E, assim, é o gênero mínimo, dentre todas as que poderiam solucioná-lo, que indicará a curva mais simples a ser utilizada na resolução de determinado problema.

Descartes aponta, na verdade, dois possíveis erros no uso das curvas-solução dos problemas geométricos: falhamos quando empregamos um meio mais complexo do que é necessário, mas também quando empregamos meios excessivamente simples. Embora se considere "óbvio" o erro de querer resolver um problema com meios insuficientes – seria decretar de antemão o fracasso da empreitada –, a observação de Descartes relativa ao segundo dentre os dois erros indica que cada problema contém requisitos mínimos e que a decisão sobre a sua solução mais simples exige que eles sejam rigorosamente observados. Isso significa também reconhecer o papel central da entidade "problema", desta vez não mais em termos gerais, mas no âmbito do objeto-solução a ser estudado: embora a curva mais simples seja determinada por critérios algébricos, tais critérios algébricos (e a curva) são emergentes do problema e, portanto, determinados por suas exigências mínimas, de natureza geométrica.

Em outras palavras, para evitarmos o primeiro erro (o do uso de curvas mais complexas que as necessárias), é preciso já ter superado a possibilidade do segundo erro: não tendo sido apontadas as condições mínimas impostas pelo problema, não se poderia jamais detectar a solução mais simples. Certa curva é uma solução adequada apenas relativamente a determinado problema e, portanto, não é ela, em si mesma, que se revela ou que se coloca como a mais simples do ponto de vista resolutivo. Embora o critério de ordenamento das curvas seja, no final, algébrico, a determinação das mais simples e adequadas em termos resolutivos se dá a partir ou no interior de um problema. A observação de Descartes relativa ao segundo tipo de erro quer evitar uma postura epistemo-metodológica inadequada, que parte (da excessiva independência) da equação (e dos objetos geométricos), cada qual com seu ordenamento, e vai à procura de um problema que os acolhe como sua solução, enquanto a perspectiva metodológica cartesiana tem sempre a direção oposta: é preciso partir do problema e das condições que ele impõe, para que se determine a equação e a curva mais simples que preenchem o patamar mínimo requerido pela solução. A pergunta fundamental não é: "qual a curva mais simples dentre todas", mas "qual a curva mais simples que resolve o problema proposto". Contrariamente aos intérpretes que consideram um erro "óbvio" querer empregar meios insuficientes, parece-nos que este preceito enfatiza a importância da relação entre problema e curva-solução. Descartes não concede total independência à equação (e aos objetos geométricos), cada qual com seu ordenamento, frente aos problemas. Querer resolver um problema por meio de uma curva mais simples que a mínima exigida é querer resolver um problema sem considerar o problema, é confundir a simplicidade resolutiva com a simplicidade do objeto, é desconsiderar a concepção cartesiana de que fazer geometria é resolver problemas.[73]

O primeiro erro, por sua vez, consiste em empregar uma curva mais complexa do que a necessária. Nessa perspectiva, Descartes nos remete ao *mesolabum*, apresentado no início do Livro II, para mostrar que as curvas determinadas por ele, embora permitam inserir várias médias proporcionais entre duas retas dadas, não são as mais simples que possam cumprir essa finalidade. As curvas AD, AF e AH nos permitem, respectivamente, determinar duas, quatro e seis médias proporcionais, visto que $\frac{YA(=YB)}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH} = \frac{YH}{YN} \ldots$ Contudo, a curva AD, por exemplo, é do segundo gênero (sua equação é $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$), e podemos determinar duas médias proporcionais por meio das cônicas, que são do primeiro gênero (AT VI, p. 443-4).[74] As curvas AF e AH são igualmente

73 Essa preocupação cartesiana não é nova. Quando, na Regra 13, Descartes apresenta sua teoria das questões, ele afirma que, "quando se nos propõe uma questão para resolver, frequentemente acontece que não notamos logo a que gênero ela pertence (...). Frequentemente, alguns apressam-se de tal modo a investigar proposições (...). Não são menos ineptos do que um criado enviado a qualquer lugar pelo seu senhor e que estivesse tão desejoso de obedecer que se pusesse a correr precipitadamente sem ainda ter recebido ordens e sem saber onde o mandavam ir" (Descartes, 1985, p. 86-7; AT X, p. 434).

74 Sendo x e y duas médias proporcionais entre a e b, teremos $a:x = x:y = y:b$; portanto, $x^2 = ay$, $y^2 = bx$ e $xy = ab$, de modo que x e y podem ser obtidos pela interseção de duas parabólicas ou de uma parabólica e uma hipérbole.

excessivamente complexas, sendo elas do quarto e do sexto gênero (respectivamente, $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$ e $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$).

Esses são os dois tipos de erros a serem evitados.[75] E, com isso, Descartes determina tanto o critério da maior simplicidade possível quanto o critério do nível mínimo de simplicidade necessária, o primeiro critério já tendo sido indicado por Pappus.[76] Uma vez estabelecida a classificação dos problemas e, portanto, determinadas as condições mínimas exigidas por cada grupo, o critério da simplicidade passa a ser mais fundamental, ainda mais por se tratar de problemas cada vez mais complexos.[77]

O segundo bloco (III-B) do Livro III tem por função, como afirma Descartes, a de eliminar a possibilidade desses erros acima apresentados. Se a resolução de um problema exige que as construções geométricas sejam da forma mais simples possível, mas não mais do que o mínimo requerido, isso exigirá um estudo que permita reconduzir as equações correspondentes a sua forma mais simples e irredutível e, portanto, uma teoria concernente a técnicas de transformação e de redução das equações à sua forma elementar e ao lugar de cada uma delas em relação aos problemas a serem solucionados. O resultado desse estudo é um conjunto bastante amplo de regras de manipulação e de transformação sobre as equações, de sorte que, uma vez incluído também o próximo bloco (III-C), podemos reagrupá-las ao redor de três conjuntos de temas: a) regras relativas à determinação das raízes da equação, em especial do seu número, dos sinais e da possibilidade de sua variação; b) regras de transformação de equações por meio de substituições lineares; c) procedimentos voltados à redução das equações. O primeiro tema tem impacto direto na construção geométrica, dado que as raízes são construídas geometricamente como ordenadas de pontos de interseção de curvas, e seus sinais denunciam a posição das interseções em relação ao eixo considerado; o segundo tema permite a condução das equações à

75 Como diz Rabuel (1730, p. 418), é um erro empregar seções cônicas quando círculos são suficientes, mas também não as empregar quando eles são insuficientes.

76 Cf. o que diz a *Coleção* de Pappus e também o que dissemos acima, quando tratamos da importância desse autor para Descartes. Afirma Pappus: "Ademais, parece ocorrer um erro considerável entre os geômetras quando encontram um problema plano por meio das cônicas ou das lineares [grâmicas] e, de uma maneira geral, quando o resolvem por meio de um gênero de curvas inapropriado" (Pappus, 1982. p. 208; Pappus, 1588, p. 61).

77 Esses dois critérios tampouco deixarão de ter "consequências" no pensamento cartesiano posterior. Uma causa (entendida como produção e razão explicativa de um efeito), embora possa ser eminente (ser mais excelente do que seu efeito), precisa ser, no mínimo e em princípio, apenas formal (tão excelente quanto o efeito). Nesse caso, é o efeito que clama por uma causa mínima (sobre esse tema, cf. a terceira das *Meditações* de Descartes). Da mesma forma que um problema impõe condições mínimas (que também devem ser as máximas) para poder ser solucionado, um efeito exige da causa um grau de realidade suficiente para causá-lo (uma causa formal), mas que tampouco poderá, em princípio, ser mais do que suficiente: em geral, não há como determinar uma causa para além do que exige seu efeito. Como se pode ver, para a resolução de um problema ou para a compreensão de algo, evitar o segundo erro é mais fundamental do que evitar o primeiro: este é um erro de superabundância, ao passo que o segundo é uma questão de insuficiência.

sua forma standard, garantindo, assim, o cumprimento dos princípios metodológicos supracitados; o terceiro, finalmente, possibilita, nessa mesma direção, a indicação dos casos em que equações de grau superior a dois e equações de grau superior a quatro poderiam corresponder, respectivamente, a problemas planos e a problemas sólidos, e assim nos demais casos.

O estudo da natureza das equações contém algumas regras de autoria do próprio Descartes e outras já conhecidas na época, mas cuja influência sobre ele permanece enigmática.[78] Seguindo principalmente a exposição feita por Scott (1976, p. 135-140), talvez valha a pena indicar algumas das principais realizações dos predecessores de Descartes, apesar da quase completa ausência de referência a eles na obra cartesiana. Cardano (1501-1576), em sua *Ars Magna* (1545) nos fornece a solução das cúbicas, cuja invenção, como afirma Descartes – e estes são os únicos dois nomes citados por ele –, é atribuída a Scipio Ferrius (1465-1526), embora Tartaglia (1500-1557), como se sabe, a tenha reivindicado. Cardano dominava a técnica de remoção do segundo termo de uma equação cúbica, tendo resolvido várias delas, considerando raízes positivas e negativas, e tendo se deparado também com a raiz cúbica de números complexos e raízes imaginárias. Ele havia observado também que uma cúbica tinha três raízes e que a soma das raízes era igual ao coeficiente do segundo termo (x^2), com sinal trocado. Ele também apresentou a solução da biquadrática $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, efetuada por Ludovico Ferrari (1522-1565), seu aluno. Por sua vez, Stifel (1487-1567), em sua *Arithmetica Integra* (1544), introduziu a prática de arranjar os termos da equação a partir da ordem decrescente das potências dos desconhecidos e de igualá-la a zero. Descartes reconhece ser melhor, em geral, considerá-la dessa forma, e segue essa prática, ao mesmo tempo em que assinala, por meio de um asterisco (*), a ausência de um termo. Embora evite quando possível, Stifel trata das raízes negativas, chamadas por ele de *numeri absurdi* e por Cardano de *aestimationes vel fictae*. Bombelli (1526-1572), em sua *Algebra* (1572; 1579), ao mesmo tempo em que resolveu a equação $x^3 - 7x = 6$, reconheceu que o caso irredutível em equações cúbicas dá valores reais às raízes. Viète (1540-1603) mostrou, em sua *In Artem Analyticam Isagoge* (1591), como formar, a partir de uma equação, outra equação cujas raízes são iguais às da primeira, acrescidas ou diminuídas de certa quantidade, técnica que utilizou para a eliminação do segundo termo de uma quadrática e de uma cúbica. Em outras obras, ele resolveu equações cúbicas e biquadradas, aperfeiçoando, respetivamente, o método de Cardano e de Ferrari, além de apresentar relações importantes entre as raízes das equações e seus termos, embora tenha recusado lidar com raízes negativas. Depois de Viète, Girard (1595-1632), em sua *Invention Nouvelle em l'Algèbre* (1629), mostra bastante destreza na manipulação de raízes negativas e resolve equações quadráticas pelo método de completar quadrados, e

78 Descartes parece não reconhecer nenhum tipo de dívida para com matemáticos anteriores; nega, em especial, a influência de Viète.

também observa ser a equação, por vezes, "impossível". Com o estudo de cúbicas e biquadradas, ele afirma que uma equação de grau *n* tem *n* raízes. De sua parte, Harriot, em sua *Artis Analyticae Praxis* (1631), talvez um dos que mais tem posições similares às de Descartes, afirma que: frações e números surdos podem ser eliminados das equações por meio da multiplicação e da divisão feitas sobre seus termos; o número de raízes é correspondente à dimensão (grau) da equação; o termo absoluto (sem incógnita) da equação é igual ao produto das raízes; as raízes de uma equação podem ser aumentadas ou diminuídas ainda quando desconhecidas, sendo possível, com isso, remover um ou mais de seus termos. Harriot também, na *Exegetice Numerosa*, resolve numericamente equações até o quinto grau, conhece raízes negativas, embora em geral as desconsidera, e trata as imaginárias também como impossíveis.

Essas observações nos fornecem um panorama geral dos estudos relativos à natureza da equação que vinham sendo feitos na segunda metade do século XVI e no início do século XVII, embora Descartes afirmasse começar lá onde os outros haviam chegado. De todo modo, o Livro III de *A Geometria* evidencia esse horizonte algébrico partilhado por ele e por seus contemporâneos.

Segue uma síntese das regras dadas por Descartes.

1) Pode haver numa equação tantas raízes quantas são as dimensões da quantidade desconhecida (isto é, quanto for o grau da equação): um polinômio de grau *n* tem, no máximo, *n* raízes, podendo ser verdadeiras ou falsas (positivas ou negativas). Assim, a equação $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ tem quatro raízes, valendo +2, +3, +4 e –5, de modo que, se multiplicarmos $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$ e $x + 5 = 0$, obteremos a equação. A raiz falsa (negativa) é dita também valer "menos do que nada" ou corresponder à "falta de uma quantidade" (AT VI, p. 445).

2) Podem-se diminuir as dimensões de uma equação dividindo-a por um binômio formado (e apenas por um binômio formado) pela quantidade desconhecida somada de uma raiz verdadeira ou subtraída de uma raiz falsa. Assim, a equação dada mais acima pode ser fatorada por $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$ e por $x + 5 = 0$, mas apenas por elas, o que mostra não haver outra raiz além dessas quatro.

3) Em qualquer equação poderá haver tantas raízes verdadeiras quantas trocas de sinal e tantas raízes falsas quantas sequências de sinal houver na equação. Essa é a Regra dos Sinais de Descartes, já conhecida, por vezes de forma incompleta, por Cardano e por outros.

4) Raízes falsas podem se tornar verdadeiras e verdadeiras, falsas, pela troca de sinal no segundo, quarto, sexto e outros termos pares, sem alterar nos demais, ímpares. Assim, se na equação $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ fizermos a troca de sinal, teremos a equação $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, cujas raízes serão

–2, –3, –4 e +5.

5) Pode-se aumentar ou diminuir as raízes de uma equação ainda desconhecidas pela substituição do termo desconhecido por outro maior ou menor, conforme a quantidade desejada. Assim, as raízes da última equação poderão ser aumentadas de 3, se fizermos $y - 3 = x$, de onde, por substituição, teremos $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$ ou, então, $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, cujas raízes serão +1, 0, –1 e +8.

6) Se, por outro lado, aumentarmos as raízes verdadeiras, diminuiremos as falsas da mesma quantidade, e se diminuirmos as primeiras, aumentaremos as outras, podendo algumas delas se tornarem nulas ou, então, de verdadeiras se tornarem falsas e de falsas, verdadeiras.

A partir dessas regras, Descartes nos apresenta duas técnicas importantes de substituição e transformação das equações. A primeira consiste na remoção do segundo termo de uma equação, útil no estabelecimento da forma padrão de equações de terceiro e quarto graus e na avaliação da possibilidade de redução das de quarto grau. A eliminação do segundo termo se faz somando ou subtraindo a raiz do coeficiente do segundo termo dividido pelo número de dimensões do primeiro termo: a raiz é diminuída quando os sinais dos dois termos são opostos e é aumentada quando eles são iguais.[79] Assim, na equação $y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$, divide-se 16 por 4 e soma-se o resultado à raiz (isto é, $y + 4$); depois disso, procede-se à substituição de $y + 4$ por z, de modo que $y = z - 4$. A equação resultante é: $z^4 - 25z^2 - 60z - 36 = 0$, cujas raízes são –3, –2, –1 e +6, contrariamente às da equação anterior que eram –7, –6, –5 e +2. Descartes fornece também um cálculo geral concernente a essa propriedade para o caso de grau quatro, técnica já utilizada por Cardano, Ferrari, Viète e Harriot.

A segunda técnica consiste em tornar verdadeiras todas as raízes falsas de uma equação, sem que as verdadeiras se tornem falsas, pelo aumento do valor delas de uma quantidade maior do que qualquer uma das raízes falsas. A partir disso não haverá, na equação resultante, dois sinais consecutivos iguais, e o coeficiente do terceiro termo será maior do que o quadrado da metade do segundo.[80] Esse procedimento é necessário para o estabelecimento de uma equação de sexto grau em sua forma padrão.

Em seguida, Descartes acrescenta outros procedimentos, como o que permite preencher todos os lugares de uma equação, algo que será necessário para o tratamento das equações de sexto grau (dado que o termo constante não poderá ser igual a zero), bem como o que permite reduzir a inteiros os coeficientes "quebrados"

79 Em outras palavras, a remoção do segundo termo se dá pela substituição de x por $y \pm \frac{a}{n}$ na equação $x^n \pm ax^{n-1} + \cdots = 0$.

80 Fazendo $x = y - a$, de acordo com a presente regra, a equação resultante $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - \cdots = 0$ satisfaz $q > (\frac{p}{2})^2$.

(fracionários) e, por vezes, os coeficientes "surdos" (irracionais),[81] e também o que possibilita tornar o coeficiente de um termo igual a determinada quantidade que se desejar, mantendo igual a 1 o coeficiente do primeiro termo.

O bloco III-B termina com uma observação sobre as raízes imaginárias: as raízes de uma equação, sejam elas positivas ou negativas, por vezes não são reais, mas apenas imaginárias, não havendo quantidade alguma correspondente. Embora o nome seja uma introdução cartesiana, as raízes imaginárias haviam sido notadas por Cardano e Ferrari, mas negligenciadas por Viète e Harriot.

O bloco III-C trata da redutibilidade das equações, tema de capital importância dentro da obra e aos seus propósitos resolutivos, fundamentalmente para evitar o erro de resolver um problema por meio de construções inapropriadas. O texto começa tratando das equações de terceiro grau. Depois de eliminar frações e também os irracionais tanto quanto possível (e de proceder às transformações sugeridas anteriormente), é preciso procurar um fator binomial pelo qual a equação possa ser dividida, caso em que, podendo ser reduzida a uma equação quadrática e tratando-se, portanto, de um problema plano, ela será construída com régua e compasso. A equação $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$ (uma cúbica em y^2), por exemplo, pode ser dividida por $y^2 - 16$, tendo como resultante a equação $y^4 + 8y^2 + 4 = 0$; nesta, fazendo $y^2 = z$, temos: $z^2 + 8z + 4 = 0$.[82] Caso nenhum fator binomial possa ser encontrado para dividir a equação, a resistência da equação ao abaixamento de grau denuncia que o problema é sólido, e sua solução envolverá uma cônica, sendo um erro tentar construí-lo pelo emprego de círculos e retas tanto quanto seria errado empregar cônicas na construção de problemas planos.

No caso de uma equação de quarto grau, o procedimento é bastante similar ao anterior. Tendo encontrado um binômio compatível com a divisão, a equação é reduzida a uma de terceiro grau, e os procedimentos seguem os mesmos passos do caso anterior. Se, por outro lado, não for encontrado um binômio compatível, é preciso remover o segundo termo da equação da forma já explicada e, depois disso, procurar fatorá-la em dois polinômios de segundo grau, cujo produto seja igual a ela. Assim, a equação $x^4 + px^2 - qx + r = 0$ pode ser obtida pela multiplicação dos dois polinômios do tipo $x^2 + yx + z = 0$ e $x^2 - yx + v = 0$. A equação resultante dessa multiplicação é $x^4 + x^2(z - y^2 + v) + x(vy - yz) + vz = 0$, a qual, por identificação de coeficientes ($p = z - y^2 + v$, $-q = vy - yz$ e $r = vz$) e fazendo $y^2 = x$, depois de eliminar u e v, temos uma cúbica da forma $y^6 + 2py^4 + y^2(p^2 - 4r) - q^2 = 0$, e os cálculos nos permitem determinar as raízes da equação original. Descartes fornece vários exemplos desse gênero.

81 Descartes transforma, por substituição de x por $\frac{y}{\sqrt{3}}$, a equação $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ na equação $y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$, que, por sua vez, por substituição de y por $\frac{z}{3}$, se transforma na equação $z^3 - 9x^2 + 26z - 24 = 0$.

82 Descartes fornece também um exemplo geral.

Depois disso, Descartes analisa um problema retirado do Livro VII, Prop. 72, da *Coleção* de Pappus (Pappus, 1982, p. 606-8; Pappus, 1588, 206-7), e evidencia sua forma de resolução a partir dos procedimentos expostos. Tendo como correspondente a equação $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3 + a^4 = 0$, Descartes mostra, como Pappus,[83] que o problema é plano e que, dependendo da quantidade desconhecida escolhida, ele pode se apresentar mais ou menos complicado, sem alterar, contudo, sua natureza (podendo, portanto, a raiz ser construída com régua e compasso). O exame de Descartes mostra que, embora tenha como resultado uma equação de quarta dimensão, o problema, mesmo assim, é um problema plano e seria um "pecado" grave resolvê-la com meios mais complexos. Por outro lado, ainda que Descartes não se manifeste sobre isso, o problema havia sido considerado insolúvel algebricamente por Ghetaldi (1566/68?-1626), em sua obra póstuma *De resolutione et compositione mathematica* (1630, p. 330-333), talvez por corresponder a uma equação de quarto grau, não tendo Ghetaldi "notado" que ela poderia ser decomposta em dois fatores de grau dois. A resolução desse problema pode ter sido capital para Descartes, por ter evidenciado a superioridade de seu método, tanto em relação aos antigos quanto em relação aos modernos: suas técnicas de decomposição de um polinômio de grau quatro em dois fatores de grau dois (associadas ao seu método resolutivo como um todo) evidenciaram a existência de soluções mais simples e mais diretas do que as fornecidas por Pappus e de problemas cuja primeira impressão poderia nos enganar quanto à sua natureza, complexidade ou insolubilidade.[84]

Desse conjunto de considerações, Descartes conclui que, embora pudesse fornecer outras regras para resolver as equações cúbicas e biquadráticas, elas seriam supérfluas, no caso dos problemas planos, pois podem ser reconduzidas às construções dadas. Para os outros casos, é preciso aplicar a regra geral acima apresentada: deve-se proceder à transformação e à redução das equações e averiguar se elas podem ser decompostas como o produto de dois polinômios de grau inferior. Não podendo serem reduzidas a equações mais simples, equações de três ou quatro dimensões correspondem a problemas sólidos, e equações de cinco ou seis dimensões correspondem a problemas supersólido, e assim por diante. E, assim, todas essas considerações mostram a utilidade da teoria das equações e do instrumental algébrico, voltados à resolução dos problemas geométricos e a evitar erros resolutivos.

O quarto (III-D) e quinto (III-E) blocos do Livro III tratam exatamente da resolução geométrica das equações correspondentes aos problemas sólidos e mais do que sólidos. Uma vez posta uma equação em sua forma padrão e não podendo ser ela redutível a uma mais simples, uma equação de terceiro ou quarto grau corresponde a um problema sólido, e uma de quinto ou sexto grau, a um problema supersólido.

83 O problema tem origem mais antiga, tendo sido tratado, dentre outros, por Apolônio.

84 Como diz Bos (2001, p. 396), se Descartes não tivesse mostrado que uma equação de quarto grau não indica imediatamente sua natureza, podendo ela ser reduzida a um problema plano, alguém poderia se utilizar do método de Descartes e mostrar que ele era falho, pois conduzia, neste caso, a um problema sólido, quando, na verdade, Pappus já havia mostrado ser ele plano.

No primeiro caso, as raízes podem ser determinadas por meio de uma das seções cônicas (com o auxílio de círculos e retas), e Descartes fornece uma regra geral para encontrá-las por meio de uma parábola, que é, segundo ele, de algum modo, a mais simples dentre elas. No segundo caso, as raízes devem ser determinadas por curvas superiores, nomeadamente por meio da parábola cartesiana auxiliada pelo círculo.

O bloco III-D trata do primeiro caso, isto é, da resolução de problemas cujas equações correspondentes de 3º. e 4º. graus são da forma $z^4 = apz^2 + a^2qz + a^3r$. Tomando *a* por unidade, a equação de quatro dimensões será $z^4 = pz^2 + qz + r$, e a de três, sendo $r = 0$, $z^3 = pz + q$, cujos sinais dos coeficientes variam dependendo da orientação das grandezas que eles representam. Eles se reduzem à interseção de uma parábola e de um círculo. Supondo descrita a parábola FAG, de vértice A, de eixo ACDKL e parâmetro (*a*) igual a 1, traça-se um ponto D sobre o eixo tal que AD=$\frac{1}{2}(p+1)$ e o segmento DE=$\frac{1}{2}q$, perpendicular ao eixo, com direção positiva. Se $r = 0$, sendo, portanto, a equação de 3º. grau, a intersecção do círculo de centro E e raio EA e da parábola determina os pontos em que a ordenada é raiz da equação. No caso de r não ser nulo, é preciso uma construção auxiliar: traça-se o ponto R sobre AE, a partir de A, de tal modo que AR=*r*, e o ponto S, no lado oposto, tal que AS=1 ($= a =$ *latus rectum*). Depois disso, traça-se o semicírculo RHS de diâmetro RS e AH perpendicular sobre AE, donde se segue que, conforme as primeiras páginas do Livro I, AH=$\sqrt{r}$. Essa construção nos fornece EH, que é raio do círculo FHG com centro E. Os pontos de intersecção desse círculo com a parábola nos permitem encontrar a solução da equação proposta. O círculo FHG pode cortar ou tocar a parábola em um, dois, três ou quatro pontos (dependendo dos sinais da equação); e, se forem traçadas a partir deles as perpendiculares (as ordenadas) ao eixo da parábola, obteremos as raízes da equação, verdadeiras ou falsas, umas de um lado e as outras do outro lado do eixo. Não havendo intersecção entre o círculo e a parábola, as raízes são todas imaginárias. Descartes discute várias situações possíveis, embora não todas, e a construção varia segundo as combinações de orientação positiva ou negativa possíveis. E, assim, a partir das mudanças de sinal conforme o caso, podemos resolver todos os casos relativos a tais equações.

Por meio desse procedimento, continua Descartes, podemos encontrar duas médias proporcionais entre duas linhas, *a* e *q*, por exemplo, dado que esse problema nos conduz a uma equação de 3º. grau. Assim, se tivermos $\frac{a}{z} = \frac{z}{\frac{z^2}{a}} = \frac{\frac{z^2}{a}}{\frac{z^3}{a^2}}$, sendo $\frac{z^3}{a^2} = q$, temos $z^3 = a^2q$.[85] Portanto, se a parábola FAG tem em seu eixo AC igual a $\frac{1}{2}a$ (metade do lado reto), e se forem traçados uma perpendicular CE igual $\frac{1}{2}q$ e um círculo de raio EA e de centro E, o círculo corta a parábola em F, e obtemos, assim, FL e LA como as duas médias proporcionais. Essa mesma regra permite, por sua vez, resolver o problema da trissecção do ângulo, ou seja, encontrar um ângulo que seja um terço de um ângulo dado. A equação derivada do problema é do tipo

85 Ou, então, sendo $\frac{a}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{q}$, temos $z^2=ax$, $x^2=qz$ e $z^3=a^2q$.

$z^3 = 3z - q$, e pode igualmente ser resolvida pelos procedimentos precedentemente apresentados.[86]

Desse conjunto de considerações, Descartes conclui que todos os problemas sólidos podem ser reduzidos a tal ponto que, para serem resolvidos, não há necessidade senão dessas duas construções fornecidas, a da inserção de duas médias proporcionais e a da divisão de um ângulo em três partes iguais. Dado que, conforme o que havia estabelecido, 1) os problemas sólidos correspondem a equações de terceiro e quarto graus, 2) todas as de quarto grau podem ser reduzidas a equações quadráticas com o auxílio de equações de terceiro grau, e que 3) as equações de terceiro grau podem ter o seu segundo termo removido, segue-se que tais problemas se reduzem a uma das três equações (tendo sido desconsiderado o quarto caso), apresentadas a seguir em sua forma padrão: $z^3 = -pz + q$, $z^3 = +pz + q$ e $z^3 = +pz - q$.

Como fechamento do bloco III-D Descartes fornece as razões pelas quais é impossível a construção de problemas sólidos (correspondentes a equações de terceiro e quarto graus) por meio exclusivamente de círculos e retas, e, portanto, as razões pelas quais os problemas sólidos não podem ser construídos sem o uso das seções cônicas, e os mais complexos sem o uso de uso de linhas também mais complexas.[87] Com isso, Descartes pretende ter fornecido também um amplo quadro das soluções de todos os problemas geométricos, alicerçado nos procedimentos mais simples e gerais possíveis e organizado conforme o gênero de cada um deles. O emprego necessário de uma seção cônica na resolução dos problemas sólidos segue-se do fato de que eles necessitam, como mostrado pelos problemas da inserção de duas médias proporcionais e da trissecção do ângulo, de dois pontos ou parâmetros de determinação: enquanto a curvatura do círculo depende de apenas uma relação simples (entre cada um dos pontos da circunferência com o centro) e, portanto, serve para determinar apenas um ponto (como no caso de uma média proporcional ou da bissecção de um ângulo), a curvatura de uma cônica, ao contrário, depende de duas relações e, assim, determina dois pontos distintos. Por essa mesma razão, é impossível que problemas superiores aos sólidos possam ser construídos por alguma das seções cônicas, dado que necessitam de mais determinações.[88]

Finalmente, estando em aberto ainda os problemas mais complexos que os sólidos, chegamos ao bloco III-E, o último do Livro III e parte final da obra toda. Aqui Descartes tratará exatamente dos problemas mais do que sólidos ou das

86 Estes dois problemas, o da trissecção do ângulo e o da inserção de duas médias proporcionais, faziam parte dos três clássicos problemas da geometria grega, o terceiro sendo o da quadratura do círculo. O da inserção de duas médias proporcionais foi, na verdade, concebido como forma reduzida do problema da duplicação do cubo.

87 Trata-se aqui de evitar o segundo dos dois erros apresentados acima.

88 Em meio a essa discussão, Descartes faz uma afirmação importante para a compreensão de *A Geometria*, embora ela não decida o debate aqui em questão. Diz ele: “tudo o que cai sob a consideração dos geômetras reduz-se a um mesmo gênero de problemas, que é o de procurar o valor das raízes de alguma equação” (AT VI, p. 475).

equações superiores as de grau quatro (na verdade apenas as de grau cinco e seis). A curva-solução dessas equações de quinto e sexto graus é a chamada “parábola cartesiana” ou também concoide parabólica, introduzida no Livro II, gerada por composição de uma parábola e de uma reta pivotante e cuja equação correspondente é de quarto grau. Sendo ela de gênero imediatamente superior às cônicas e sendo a mais simples dentre todas as suas coirmãs (tal como a parábola entre as cônicas), o método cartesiano determina (e assim será) que ela seja a curva adequada à resolução dos problemas imediatamente superiores aos sólidos. Da mesma forma que no caso anterior, Descartes fornecerá uma regra geral para a sua construção.

Tratando-se, portanto, de uma equação de quinto e sexto grau, deve-se aumentar o valor de suas raízes, para que se tornem todas verdadeiras, fazer que o coeficiente do terceiro termo seja maior que o quadrado da metade do segundo e, enfim, se for o caso, transformar a equação de quinto grau em uma de sexto grau de forma completa. Feito tudo isso, a equação resultante é do tipo $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0$, com p, q, ... $v > 0$ e $q > (\frac{p}{2})^2$, e sua solução dar-se-á pelo emprego de uma parábola cartesiana e de um círculo, cuja intersecção determinará os pontos a partir dos quais serão construídas as raízes reais da equação. O círculo tocará ou cortará a parábola em tantos pontos quantas raízes reais distintas houver, e as retas perpendiculares desses pontos a um eixo previamente dado determinará o valor da cada uma delas; havendo menos do que seis pontos, alguns deles podem coincidir e as raízes correspondentes serem idênticas, ou então algumas podem ser imaginárias, sem que haja exceção a essa regra. E, de forma semelhante ao caso anterior, Descartes afirma que, se quisermos encontrar quatro médias proporcionais, dividir um ângulo em cinco partes iguais ou, ainda, inscrever uma figura de onze ou treze lados iguais em um círculo, dentre outros problemas, podemos fazê-lo a partir da resolução supracitada, havendo outras regras que se poderiam indicar para facilitar a resolução de casos especiais.

O Livro III e *A Geometria* terminam com um parágrafo que trata dos resultados obtidos, organizados em grupos, da expectativa de Descartes para que as pesquisas deixadas em aberto sejam feitas pelos pesquisadores futuros e da reafirmação que ele faz relativa ao teor da obra e aos seus objetivos. Assim, todos os problemas de um mesmo gênero foram conduzidos a uma mesma construção, embora pudessem ser reduzidos a outras diferentes e, assim, poderiam ser resolvidos por uma diversidade distinta de maneiras. De todo modo, tivemos como resultado o ordenamento dos problemas geométricos a partir de suas condições de resolubilidade, os problemas planos sendo construídos pela intersecção de um círculo e de uma linha reta, os sólidos, pela intersecção entre um círculo e uma parábola, os de um grau mais composto que os sólidos, pela intersecção de um círculo e de uma linha de um grau mais composta que a parábola, e assim poder-se-ia continuar, por meio desse mesmo procedimento geral, com os demais indefinidamente, como se fosse uma progressão matemática, algo deixado ao encargo das gerações futuras.

Um ensaio do método

A Geometria é o terceiro tratado que segue o *Discurso do Método*. E, efetivamente, podemos avaliá-la como uma verdadeira ilustração de seu método. Como diz a Segunda Parte do *Discurso*, tendo se proposto a "procurar o verdadeiro método para chegar ao conhecimento de todas as coisas" (AT VI, p. 17), Descartes resolveu tomar "de empréstimo o melhor da Análise geométrica e da Álgebra", sem deixar de, simultaneamente, corrigir "todos os defeitos de uma pela outra" (AT VI, p. 20).[89] Filiando-se aos geômetras gregos, praticantes da análise, e à sua tradição, o filósofo nos oferece as quatro regras do método.

De sua parte, *A Geometria* foi vista como a melhor exemplificação e como prova da validade do método. É o que Descartes diz em uma carta a Mersenne, em fins de dezembro de 1637: "eu somente me propus pela *Dióptrica* e pelos *Meteoros* a persuadir que meu método é melhor que o ordinário, mas eu pretendo tê-lo demonstrado por minha *Geometria*" (AT I, p. 478). É verdade que os outros dois ensaios, cada um a seu modo, devam também ilustrar o método; e, como o filósofo afirma em uma carta ao P. Vatier, de 22 de fevereiro de 1638 (AT I, p. 559), o Discurso VIII de *Os Meteoros* nos oferece uma ilustração, algo confirmado pela própria obra (AT VI, p. 325). E, assim, embora não apenas *A Geometria* deva ser examinada para compreendermos o método cartesiano, ela, sem dúvida, ocupa um lugar especial.[90]

Já nos referimos a pelo menos três aspectos metodológicos em *A Geometria*: a tradição dentro da qual Descartes se insere (os praticantes da análise), tornada acessível principalmente pela obra de Pappus e retomada pelos algebristas do século XVI; a estrutura do método propriamente dito, com suas três etapas, a "análise", a construção e a demonstração; o conjunto de considerações teórico-técnicas e metodológicas sobre a dinâmica resolutiva, apresentadas em vários momentos da obra, principalmente no início de cada livro, dentre as quais se destaca a de que todo objeto-solução deva ser o mais simples possível, mas não menos do que o mínimo necessário. Além disso, já apresentamos a característica central do método: ele é um método de resolução de problemas.

Tendo isso presente, seguem algumas observações sobre o tema, circunscritas a *A Geometria* e às quatro regras da Segunda Parte do *Discurso*. *A Geometria* tem três "movimentos" (ou âmbitos) metodológicos fundamentais, com certo encadeamento ou imbricação entre eles, e cada qual com amplitude distinta: trata-se da relação entre problemas, do tratamento resolutivo, interno, de cada problema e do ordenamento dos objetos conhecidos a partir dos dois movimentos anteriores.

89 Descartes acrescenta, em outra passagem na Segunda Parte do *Discurso* (AT VI, p. 18), a Lógica como disciplina que traria vantagens para a confecção de seu método.

90 Cf. sobre isso Battisti (2002).

Vista em seu âmbito mais geral, *A Geometria* tem como "objeto" de estudos os problemas geométricos: ela trata de problemas, de suas resoluções, pretendendo resolvê-los todos. Nesse sentido, os problemas estabelecem relações de dependência e de ordenamento entre eles: não são apenas os objetos que se ordenam, mas também, e primeiramente, os problemas. Tendo herdado dos gregos uma classificação, Descartes a retoma, os divide em problemas planos, sólidos e supersólidos, e os organiza a partir dessa classificação. Sob este aspecto, os problemas se ordenam dos mais simples para os mais complexos, se classificam em grupos, cada qual podendo ser resolvido sob sua forma geral. Descartes começa a resolvê-los pelos mais simples. Esse é o primeiro movimento de constituição de um saber: examinar os problemas, compreendê-los em categorias e organizá-los em termos de complexidade. Estabelecida a boa ordem, deve-se começar a resolvê-los pelos mais simples, um preceito metodológico nascido da pura capacidade racional resolutiva. Esse aspecto estruturante e mais geral da disciplina organiza a própria obra, em seus aspectos mais gerais. Os problemas tampouco precisam ser resolvidos cada um individualmente: agrupados em categorias, sua resolução é também por categoria, de onde vem a universalidade resolutiva do método.

Contudo, esse ordenamento primitivo dos problemas não pode ser confundido nem com a atividade resolutiva propriamente dita nem com o ordenamento de objetos. Em termos resolutivos, partir de um problema é partir de uma complexidade, de uma configuração de elementos, conhecidos e desconhecidos, podendo eles estar mais ou menos desordenados. E, assim, o método resolutivo propriamente dito, voltado a um problema específico, parte de uma configuração complexa fornecida pelo problema, sobre a qual se debruça e examina. Esse procedimento está configurado na segunda regra do *Discurso*, na qual Descartes se refere às dificuldades (problemas) a serem divididas e examinadas para a sua resolução. Uma particularidade altamente significativa do método de análise é "supor o problema resolvido" e, portanto, considerar efetivamente (em termos metodológicos) a configuração do problema como completa (elementos conhecidos e desconhecidos), algo que, no caso da matemática, a notação simbólica se encarrega de manter distinto. Isso significa que a solução já está "presente" no problema, cabendo à investigação determiná-la ou encontrá-la.

A resolução de um problema, com suas três etapas, no caso de *A Geometria*, tem um duplo movimento: encontrar os elementos fundamentais resolutivos e reconstituir a complexidade no caminho de volta, mostrando que o problema foi resolvido. Nesse sentido, nos referimos por vezes ao duplo movimento de, partindo da complexidade, encontrar os elementos simples, para depois retornar à complexidade, desta vez toda ela compreendida. Neste caso, as regras dois e três do *Discurso* se veem aí contempladas e como complementares, auxiliadas pela quarta em sua função enumerativa, recapitulava e confirmativa. Essas três regras do Discurso podem ser aproximadas às três etapas resolutivas do método de *A Geometria*, a 'análise', a construção e a demonstração, ao passo que a primeira regra, menos operativa, é mais epistemológica do que metodológica: sem dizer exatamente como fazer, ela pede que sejamos cuidadosos ao longo de todo o percurso investigativo, para não nos precipitarmos nas ações e nos julgamentos, não cometermos erros de avaliação e, assim, não tomarmos as coisas pelo que elas não são, tendo a clareza e a distinção como critérios.

A primeira etapa do método, a "análise", examina o problema, faz uso de recursos algébricos e conduz a dificuldade até seu núcleo mínimo. A equação algébrica condensa a dificuldade e a expressa da forma mais simples possível. Como diz a segunda regra do *Discurso,* é preciso dividir o problema até ele revelar suas relações fundamentais. É o problema que comanda essa dinâmica, e é condição de todo problema bem formulado propor uma solução: assim, todo problema já contém (ou assume-se que contém) os elementos que propiciam a sua resolução, e essa é a razão da preferência cartesiana pela análise (e de poder pressupor o problema como resolvido). Essa etapa, como diz Descartes em *A Geometria*, deve ser feita ordenadamente e deve pressupor uma ordem quando ela não é evidente, visto que a ordem é um pré-requisito do conhecimento, definido como "relação de determinação cognitiva entre coisas".

Assim, a terceira regra do *Discurso* se impõe à primeira etapa do método, embora seja mais fundamental à segunda, a construção. Construir é construir geometricamente a equação resultante da etapa anterior. Nesse caso, sendo a equação formada por seus diferentes monômios, é preciso ordenadamente construí-los um a um, como Descartes fez com o problema de Pappus. Contudo, a equação não sugere a construção, mas apenas evidencia certas relações que devem ser respeitadas. Por isso, a construção pode perder-se, caso não siga ordenadamente certos procedimentos construtivos para cada tipo de problema.

A terceira etapa do método, a demonstração, não é uma etapa resolutiva propriamente dita, mas apenas avaliativa e confirmativa. Do ponto de vista resolutivo, ela poderia ser dispensada; do ponto de vista de uma confirmação (prova) de que a resolução foi adequada, ela é necessária. Isso faz dela ser dispensável resolutamente, mas indispensável como garantia de que o processo foi completo e nada foi omitido, tal como afirma a quarta regra do *Discurso*. E, assim, *A Geometria* ilustra as quatro regras do *Discurso*, embora estas devam ser avaliadas como rabiscos feitos sobre o papel (bidimensional), acessíveis ao grande público, representativos de uma paisagem (tridimensional) rica, complexa e diversificada.

Finalmente, se o método parte de problemas, os ordena e os resolve, por outro lado, ele não parte de objetos tampouco de verdades, sejam simples ou não. Se um problema é uma configuração complexa, os objetos aparecem dentro dele e mostram sua maior ou menor simplicidade no interior dele. Além disso – e o que é mais fundamental – o ordenamento dos objetos é resultado do método e não seu ponto de partida. Querer partir dos objetos mais simples é confundir objetos com problemas. E, assim, quando Descartes fala de ordenamento, é preciso distinguir, pelo menos, os dois tipos de entidades. Em *A Geometria*, por exemplo, o ordenamento de seus objetos (as curvas e as equações) é uma conquista da investigação e não seu ponto de partida, embora se possa (se deva) pressupor de antemão que existam tais ordenamentos. Além disso, os objetos geométricos têm, pelo menos, um duplo status.[91] Eles se constituem primeiramente como objetos-solução dos problemas; depois, eles se tornam objetos propriamente ditos, passíveis de serem estudados em si mesmos e dos quais se determinam suas propriedades. E, assim, tendo nascido como meio de solução, o seu ordenamento se dá em meio ao ordenamento dos problemas e na busca de sua resolução. O ordenamento dos objetos, portanto, é um resultado da investigação e não um dos seus pressupostos ou ponto de partida.[92]

Estas são, em linhas gerais, as características do método em *A Geometria* e suas relações com a Segunda Parte do *Discurso*.

Recepção e posteridade

Os quatro textos publicados em 1637 não foram um sucesso editorial, não tendo havido nenhuma reimpressão ou reedição deles durante a vida de Descartes. Quanto a *A Geometria*, houve, até o falecimento do filósofo em 1650, apenas a publicação da tradução latina feita por F. van Schooten, em 1649, com reedições posteriores.

Embora o texto francês de *A Geometria* tenha privado a muitos leitores seu acesso, e seu estilo, notação e obscuridades tenham se configurado como obstáculos à sua compreensão, a terceiro ensaio teve, mesmo assim, impacto imediato entre seus contemporâneos, registrado na correspondência imediatamente posterior. Dentre as discussões mais contundentes, e com certa hostilidade, se destaca o debate de Descartes com Fermat, Roberval e Pascal, sobretudo a respeito da construção de tangentes e de temas relacionados ao que virá a se constituir a geometria analítica, "invenções" hoje atribuídas simultaneamente a Descartes e a Fermat. Quanto ao tema das tangentes, Descartes foi o primeiro a publicar, mas é o método de Fermat que terá continuidade e que, ao lado do tratamento cinemático de Roberval, se aproximará do cálculo diferencial e integral que está prestes a nascer. Nesse sentido, tanto Descartes quanto Fermat antecipam muitos dos pontos do que será a matemática posterior, tendo sido *A Geometria* uma fonte de inspiração para autores como Desargues, Huygens, Newton e Leibniz, apesar das críticas principalmente deste último. Se, por um lado, Descartes afirma ter resolvido "todos os problemas de geometria", suas técnicas e teorias algébricas, por outro lado, são uma revitalização

91 E. Giusti defende três funções aos objetos de *A Geometria*: eles são soluções de problemas, instrumentos de investigação e objetos de estudos (2000, p. 33; p. 42-3; p. 115-20).

92 Essa é uma característica geral da metodologia cartesiana também em outras áreas.

e um impulso à matemática posterior: geometria analítica, cálculo infinitesimal, teoria das equações, estudo das curvas transcendentes (não algébricas) são novos capítulos abertos por Descartes, mesmo que, por vezes, em oposição ao que ele pensava. Encontra-se como parte central da álgebra o estudo de equações com uma incógnita por meio da determinação das relações entre coeficientes e raízes, algo explorado por Descartes.

Por sua vez, no que diz respeito ao aspecto construtivo de *A Geometria*, à construção geométrica, haverá um rápido declínio no seu interesse: tanto a construção, enquanto inspirada na geometria clássica, quanto seus aspectos metodológicos e epistêmicos, presentes na obra de Descartes e importantes ao seu pensamento em geral, gradualmente perderam sua relevância no interior da matemática. Da mesma forma, a discussão sobre meios adequados para o traçamento das curvas perde sua relevância teórica, e a teoria da "construção das equações", cujo objetivo central era, como afirma Bos, determinar as raízes das equações pela intersecção de pontos de curvas algébricas de grau inferior, não teve continuidade por muito tempo.[93]

Cabe destacar, finalmente, o caráter lisível da obra, a notação simbólica límpida, coerente e constante que faz dela ser compreensível atualmente, mas também a consagração do uso das letras finais e iniciais do alfabeto para quantidades desconhecidas e conhecidas. Seu impacto nas outras áreas do saber começou na própria obra de Descartes, especialmente em *A Dióptrica*, e se estende pelos séculos afora. Descartes representa um ciclo de fechamento da geometria antiga e a abertura de outro em alguma medida ainda em vigor nos dias de hoje.

93 Cf. sobre isso Bos (1981).

Referências bibliográficas:

APOLLONIUS. *Conics.* Chicago, Britannica, 1952. Translated by Thomas L. Heath.

APOLLONIUS. *On conic sections.* Cambridge, W. Heffer & Sons, 1961. Edited by T. L. Heath.

BATTISTI, C. A. *O método de análise em Descartes*: da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento. Cascavel (PR), EDUNIOESTE, 2002.

BOS, H. J. M. Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the "construction of equations", 1637-ca. 1750. In: *Archive for history of exact sciences.* Heidelberg, Springer-Verlag, 1984, v. 30, pp. 331-380.

BOS, H. J. M. On the representation of curves in Descartes' Géométrie. In: Archive for history of exact sciences. Heidelberg, Springer-Verlag, 1981, v. 24, n. 4, pp. 295-338.

BOS, H. J. M. *Redefining geometrical exactness*: Descartes' transformation of the early modern concept of construction. New York, Springer, 2001.

BOS, H. J. M. The structure of Descartes' Géométrie. In: BELGIOIOSO, G. et alii (org.). *Descartes*: Il metodo e i saggi. Roma, Enciclopedia Italiana, 1990, tomo II, p. 349-369 [Tradução francesa: "La structure de la Géométrie de Descartes". In: Revue d´histoire des sciences, 1998, n. 51, p. 291-317].

DESCARTES, René. *A geometria*. In: *Discurso do método & Ensaios*. Organizado por Pablo Rubén Mariconda. Tradução de César Augusto Battisti. São Paulo, Editora Unesp, 2018.

DESCARTES, René. *Discurso do método & Ensaios*. Organizado por Pablo Rubén Mariconda e traduzido por César Augusto Battisti, Érico Andrade, Guilherme Rodrigues Neto, Marisa Carneiro de Oliveira Franco Donatelli, Pablo Rubén Mariconda, Paulo Tadeu da Silva. São Paulo, Editora Unesp, 2018.

DESCARTES, René. Discurso do método; Meditações; Objeções e respostas; As paixões da alma; Cartas. 3 ed. In: *Os Pensadores.* São Paulo, Abril Cultural, 1983.

DESCARTES, René. *Oeuvres complètes* III: Discours de la Méthode et Essais. Paris: Gallimard, 2009.

DESCARTES, René. *Oeuvres.* Paris, Vrin, 1996. 11 vol. Publiées par Charles Adam e Paul Tannery.

DESCARTES, René. *Regras para a direcção do espírito.* Lisboa, Edições 70, 1985. Tradução de João Gama.

DUBOUCLEZ, O. *Descartes et la voie de l'analyse.* Paris, PUF, 2013.

EUCLIDES. *Les données.* Paris, Albert Blanchard, 1966. Introduction par J. Itard et traduction de F. Peyrard.

EUCLIDES. *The thirteen books of Euclid's elements*. Chicago, Britannica, 1952. Translated by Thomas L. Heath.

EUCLIDES. *The thirteen books of Euclid's elements*. New York, Dover Publications, 1956. 3 vol. Translated by Thomas L. Heath.

GIUSTI, E. *La naissance des objets mathématiques*. Paris, Ellipses, 2000.

GUEROULT, M. *Descartes segundo a ordem das razões.* Traduction de É. Andrade (coord.), C. Battisti, M. Donatelli, E. Forlin et A. Soares. São Paulo, Discurso Editorial, 2016.

GUEROULT, M. *Descartes selon l'ordre des raisons*. Paris, Aubier-Montaigne, 1953. 2 vol.

HINTIKKA, Jaakko & REMES, Unto. *The method of analysis*. Dordretch, Publishing Company, 1974.

JULLIEN, Vincent. *Descartes* - la Géométrie de 1634. Paris, PUF, 1996.

KLEIN, Jacob. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York, Dover, 1968.

KNORR, Wilbur Richard. *The ancient tradition of geometric problems*. Boston/Basel/ Stuttgart, Birkhäuser, 1986.

LOPARIC, Z. *Descartes Heurístico.* Campinas, IFCH/ UNICAMP, 1997.

MOLLAND, A. G. Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. In: *Historia Mathematica*. New York, Academic Press, Feb., 1976, v. 3, p. 21-49.

PAPPUS DE ALEXANDRIA. *La collection mathématique.* Paris, A. Blanchard, 1982 (1ª édition française, 1933). Traduction, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke. 2 v.

PAPPUS DE ALEXANDRIA. *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Fed. Commandino urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae*. Pisauri, 1588. Tradução e edição de F. Commandino.

RABUEL, Claude. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*. Lion : Marcellin Duplain, 1730.

SCOTT, J. F. *The scientific work of René Descartes.* London : Taylor & Francis Ltd., 1976.

SERFATI, M. Les compas cartésiens. In: *Archives de philosophie*. Avril, Juin, 1993, tome 56, p. 197-230.

SHEA, W. R. *The magic of numbers and motion*: the scientific career of René Descartes. Canton (U.S.A.), Science History Publications, 1991.

TIMMERMANS, B. *La résolution des problèmes de Descartes à Kant.* Paris, PUF, 1995.

VIÈTE. François. In artem analyticen isagoge. In: *Opera mathematica.* Hildesheim/ New York, Georg Olms Verlag, 1970, p. 1-12. Original: 1646.

VIÈTE. François. *L'algèbre nouvelle de M. Viète.* Trad. en françois par A. Vasset. Paris, Pierre Rocolet, 1630.

VUILLEMIN, Jules. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. Paris, PUF, 1960.

WARUSFEL, André. *L'œuvre mathématique de Descartes dans La Géométrie : de la résolution des équations algébriques à la naissance de la géométrie analytique.* Tese, 2010.

WARUSFEL, André. La Géométrie de René Descartes. *Oeuvres complètes* III: Discours de la Méthode et Essais. Paris: Gallimard, 2009. Tradução e notas.

Revista digital: www.ifch.unicamp.br/ojs/index.php/modernoscontemporaneos